The mean value of Frobenius numbers with three arguments.

D. A. Frolenkov*

This paper is written in Russian but we translate the statement of our main result in English.

The Frobenius number $g(a_1, \ldots, a_n)$ of relatively prime positive integers $a_1, \ldots, a_n$ is defined as the largest number k that is not representable as a non-negative integer combination of $a_1, \ldots, a_n$

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = k, \qquad x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \tag{1}$$

Sometimes it is easier to use the following function

$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) + a_1 + \cdots + a_n \tag{2}$$

This function may be defined as the largest number k, that is not representable as a positive integer combination of $a_1, \ldots, a_n$ Some general results on the Frobenius problem are available in the book [1]. A.V. Ustinov proved (see [2]) that the average value of $f(a, b, c)$ is equal to $\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}$.

Theorem 1. *Let a be a positive integer,and let $x_1 > 0, x_2 > 0, \varepsilon > 0$ be real numbers. Then the following asymptotic formula is valid*

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b,c)\in M_a(x_1,x_2)} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi}\sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(R_\varepsilon(a; x_1, x_2)), \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(a; x_1, x_2) &= \left(a^{-1/6}(x_1 + x_2) + a^{-1/4}(x_1^{3/2} + x_2^{3/2})(x_1x_2)^{-1/4} + a^{-1/2} \right) a^\varepsilon \\ &\ll_{x_1,x_2} a^{-1/6+\varepsilon} \end{aligned} \tag{4}$$

and

$$M_a(x_1, x_2) = \{(b, c) : 1 \leqslant b \leqslant x_1a, 1 \leqslant c \leqslant x_2a, (a, b, c) = 1\}$$

Remark 1. *With the help of Theorem 3 it can be shown that*

$$\frac{1}{x_1x_2x_3N^{9/2}} \sum_{a\leqslant x_1N} \sum_{b\leqslant x_2N} \sum_{\substack{c\leqslant x_3N \\ (a,b,c)=1}} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi}\sqrt{abc} \right) = O_{\varepsilon,x_1,x_2,x_3}(N^{-1/6+\varepsilon}).$$

In this paper we prove the following result.

*The research was supported by the grant RFBR № 11-01-00759-a

Theorem 2. *The following asymptotic formula is valid*

$$\frac{1}{x_1x_2x_3N^{9/2}}\sum_{a\leqslant x_1N}\sum_{b\leqslant x_2N}\sum_{\substack{c\leqslant x_3N\\(a,b,c)=1}}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=O\left(N^{-1/2+\varepsilon}\left(x_1^{1+\varepsilon}\frac{x_3^{\varepsilon}}{x_2^{\varepsilon}}+x_2^{1+\varepsilon}\frac{x_3^{\varepsilon}}{x_1^{\varepsilon}}+x_3^{1+\varepsilon}\right)\right),$$

where $x_1>0, x_2>0, x_3>0, \varepsilon>0$ *are real numbers.*

This theorem was conjectured by A.V. Ustinov in [2]. To prove Theorem 4 we use the ideas from the Ustinov's papers [2] and [3] and from the E.N.Zhabitskaya's paper [4]. We also use classical bounds on exponential sums.

I am very grateful to my advisor, N.G.Moshchevitin, for helpful discussions. I would also like to thank I.D.Kan for meticulously reading and commenting this paper.

1 Введение

Числом Фробениуса $g(a_1,\dots,a_n)$ натуральных чисел $a_1,\dots,a_n$, взаимно простых в совокупности, называется наибольшее целое k, не представимое в виде суммы

$$x_1a_1+\dots+x_na_n=k,\quad \text{где}\quad x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0. \tag{5}$$

Во многих задачах оказывается удобнее рассматривать функцию

$$f(a_1,\dots,a_n)=g(a_1,\dots,a_n)+a_1+\dots+a_n \tag{6}$$

равную наибольшему целому k, не представимому в виде суммы (5), но уже с натуральными коэффициентами $x_1,\dots,x_n$. Наиболее обширный обзор результатов и задач, связанных с числом Фробениуса, приведен в книге [1]. А.В. Устиновым в работе [2] было доказано, что функция $f(a,b,c)$ в среднем ведет себя как $\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}$.

Theorem 3. *Пусть a —натуральное число, $x_1>0, x_2>0, \varepsilon>0$ —действительные числа. Тогда*

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1,x_2)|}\sum_{(b,c)\in M_a(x_1,x_2)}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=O_\varepsilon(R_\varepsilon(a;x_1,x_2)), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}R_\varepsilon(a;x_1,x_2)&=\left(a^{-1/6}(x_1+x_2)+a^{-1/4}(x_1^{3/2}+x_2^{3/2})(x_1x_2)^{-1/4}+a^{-1/2}\right)a^\varepsilon\\&\ll_{x_1,x_2}a^{-1/6+\varepsilon}\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$M_a(x_1,x_2)=\{(b,c):1\leqslant b\leqslant x_1a,1\leqslant c\leqslant x_2a,(a,b,c)=1\}$$

Remark 2. *Используя теорему 3, легко получить оценку*

$$\frac{1}{x_1x_2x_3N^{9/2}}\sum_{a\leqslant x_1N}\sum_{b\leqslant x_2N}\sum_{\substack{c\leqslant x_3N\\(a,b,c)=1}}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=O_{\varepsilon,x_1,x_2,x_3}(N^{-1/6+\varepsilon}).$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Theorem 4. *Справедлива оценка*

$$\frac{1}{x_1x_2x_3N^{9/2}}\sum_{a\leqslant x_1N}\sum_{b\leqslant x_2N}\sum_{\substack{c\leqslant x_3N\\(a,b,c)=1}}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=O\left(N^{-1/2+\varepsilon}\left(x_1^{1+\varepsilon}\frac{x_3^\varepsilon}{x_2^\varepsilon}+x_2^{1+\varepsilon}\frac{x_3^\varepsilon}{x_1^\varepsilon}+x_3^{1+\varepsilon}\right)\right),$$

где $x_1>0, x_2>0, x_3>0, \varepsilon>0$ —действительные числа.

Это утверждение было сформулировано А.В. Устиновым в работе [2] в виде гипотезы. Доказательство теоремы 4 использует идеи из работ А.В. Устинова [2] и [3] и работы Е.Н. Жабицкой [4]. Также используются классические оценки тригонометрических сумм.

Автор благодарен И.Д.Кану за указания на недочеты, имевшиеся в первоначальной версии статьи и глубоко признателен Н.Г. Мощевитину за неоднократные обсуждения полученных результатов.

2 Вспомогательные утверждения и обозначения

Разложим рациональное число r в стандартную цепную дробь

$$r = [0; a_1 \ldots, a_s] = \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_s}} \tag{9}$$

длины $s = s(r)$, в которой a_1, …,a_s — натуральные и $a_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. Через $s_1(r)$ будем обозначать сумму неполных частных

$$s_1(r) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} a_i.$$

Lemma 1. *Для любого натурального* $b > 1$ *выполнено*

$$\sum_{a \leqslant b} s_1(a/b) \ll b \log^2 b.$$

Доказательство. См в работе Д.Кнута [5]. □

Lemma 2. *Пусть* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$*—число делителей натурального числа n, тогда*

$$\tau(n) = o(n^\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon > 0$*.*

Доказательство. См книгу К. Чандрасекхарана [6, гл 6, §3, теорема 5]. □

Следующая лемма общеизвестна (преобразование Абеля)

Lemma 3. *Пусть* $f(x)$*—непрерывно-дифференцируема на* $[a; b]$*,* c_n*—произвольные числа,*

$$C(x) = \sum_{a < n \leqslant x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a < n \leqslant b} c_n f(n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(x)f'(x)dx.$$

Доказательство. См книгу А.А.Карацубы [7, гл. 2, §5]. □

Lemma 4. *Пусть* α*—произвольное действительное число,* Q*—целое и* P*—натуральное. Тогда*

$$\left| \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i \alpha x) \right| \leqslant \min\left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right),$$

где $\|\alpha\|$ *—расстояние от* α *до ближайшего целого.*

Доказательство. См книгу Н.М. Коробова [8, гл. 1, §1]. □

Corollary 1. *Пусть* α*—произвольное действительное число. Если* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[Q, Q+P]$ *и монотонна, то*

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i\alpha x) f(x)\right| \ll (|f(P+Q)| + |f(Q)|) \min\left(P, \frac{1}{\|\alpha\|}\right).$$

Доказательство. После применения леммы 3 и леммы 4, получаем

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i\alpha x) f(x)\right| \ll \left(|f(P+Q)| + \int_{Q}^{Q+P} |f'(x)| dx\right) \min\left(P, \frac{1}{\|\alpha\|}\right).$$

Используя монотонность функции $f(x)$, получаем нужную оценку. □

Lemma 5. *Пусть* τ, p *—произвольные натуральные числа, a и b —действительные. Тогда*

(a)

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b\\ \tau\nmid n}} \frac{1}{\|\frac{n}{\tau}\|} \ll (b-a)\log\tau + \tau\log\tau,$$

(b)

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b\\ \tau\nmid n}} \frac{1}{n\|\frac{n}{\tau}\|} \ll \log\frac{b}{a}\log\tau + \log\tau + \frac{\tau}{a}\log\tau,$$

(c)

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b\\ \tau\nmid n}} \frac{1}{n^2\|\frac{n}{\tau}\|} \ll \frac{1}{a}\log\tau + \frac{\tau}{a^2}\log\tau,$$

(d)

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b\\ \tau\nmid n}} \frac{n^p}{\|\frac{n}{\tau}\|} \ll b^p(b-a)\log\tau + b^p\tau\log\tau.$$

Доказательство. Доказательство (a) можно найти в книге Н.М. Коробова [8, гл. 1, §1]. Для доказательства остальных пунктов достаточно воспользоваться леммой 3. □

Обозначим, следуя Н.М. Коробову, через $\delta_q(a)$ характеристическую функцию делимости на натуральное число q

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q} \exp\left(2\pi i\frac{ax}{q}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения.

Знак звездочки в суммах вида

$$\sum_{x=1}^{a}{}^{*}, \quad \sum_{a}\sum_{x}{}^{*}$$

означает, что суммирование ведется по числам, удовлетворяющим условию $(a, x) = 1$. В суммах вида

$$\sum_{d|n}$$

суммирование ведется по делителям числа n. В суммах вида

$$\sum_{\substack{n\leqslant R\\ d|n}}, \qquad \sum_{\substack{n\leqslant R\\ d\nmid n}}$$

суммирование ведется по n, удовлетворяющим условию

$$n \equiv 0 \pmod d, \qquad n \not\equiv 0 \pmod d$$

соответственно. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

3 О функции Редсета

В работе [9] Редсет доказал следующий метод для подсчета функции $f(a, b, c)$. Пусть a, b, c —натуральные числа и $(a, b) = 1$, $(a, c) = 1$, тогда существует натуральное число l

$$c \equiv bl \pmod a,\ 1 \leqslant l \leqslant a,\ (l, a) = 1.$$

Разложим число $\frac{a}{l}$ в приведенную регулярную цепную дробь (см. например [10, гл. 1].)

$$\frac{a}{l} = \langle a_1; a_2 \ldots, a_m\rangle = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_m}} \tag{11}$$

и определим последовательности $\{s_j\}$ и $\{q_j\}$, при $-1 \leqslant j \leqslant m$ следующим образом

$$s_m = 0, \quad s_{m-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1$$

$$s_{j-1} = a_{j+1}s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1}q_j - q_{j-1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Легко доказать (см [9] или [2]) что, для последовательностей $\{s_j\}$ $\{q_j\}$ выполнено

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \cdots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty.$$

Функция Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ для $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0$ таких, что

$$\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}$$

задается формулой

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min\{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\},$$

тогда функция $f(a, b, c)$, определенная в (6), находится по формуле

$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \tag{12}$$

Так же нам понадобится следующее утверждение о последовательностях $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ (см [2]).

Statement 1. *Четверки* $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ *при* $0 \leqslant n \leqslant m$ *находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями* (u_1, u_2, v_1, v_2) *уравнения*

$$u_1u_2 - v_1v_2 = a,$$

для которых

$$0 \leqslant v_1 < u_1 \leqslant a, \quad (u_1, v_1) = 1, \quad 0 \leqslant v_2 < u_2 \leqslant a, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

Определим функцию $\rho_{l,a}(\alpha)$ следующим образом

$$\rho_{l,a}(\alpha) = s_{n-1} + \alpha q_n - \min\{s_n, \alpha q_{n-1}\}, \quad \frac{s_n}{q_n} \leqslant \alpha < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Тогда в силу однородности функции Рёдсета получим

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 \rho_{l,a}\left(\frac{t_2}{t_1}\right). \tag{13}$$

В дальнейшем нам понадобятся еще две функции

$$\rho^*_a(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^{a}{}^{*} \rho_{l,a}(t_1, t_2), \quad \rho^*_a(\alpha) = \sum_{l=1}^{a}{}^{*} \rho_{l,a}(\alpha). \tag{14}$$

Очевидно, что

$$\rho^*_a(t_1, t_2) = t_1 \rho^*_a\left(\frac{t_2}{t_1}\right). \tag{15}$$

Используя утверждение 1, можно получить следующую формулу (см. [2, §6])

$$\rho^*_a(\alpha) = \lambda^*(a, \alpha) + \alpha\lambda^*\left(a, \frac{1}{\alpha}\right), \tag{16}$$

где

$$\lambda^*(a, \alpha) = \sum_{x=1}^{a} \sum_{z=1}^{x}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} \sum_{w=0}^{a-1}{}^{*} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \alpha < \frac{w}{x-z}\right] (y + w + \alpha z). \tag{17}$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a, \alpha) = \sum_{d_1d_2|a} \mu(d_1)\mu(d_2) d_2 \lambda\left(\frac{a}{d_1d_2}, \frac{d_1\alpha}{d_2}\right), \tag{18}$$

где

$$\lambda(a, \alpha) = \sum_{x\geqslant 1} \sum_{z=1}^{x} \sum_{y\geqslant 1}^{a} \sum_{w\geqslant 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \alpha < \frac{w}{x-z}\right] (y + w + \alpha z). \tag{19}$$

4 Выделение плотности

Этот параграф является переработкой соответствующего параграфа из работы Устинова (см. [2, §5]) с учетом того, что теперь усреднение ведется по трем переменным. Обозначим за F и G следующие суммы

$$F = \sum_{a\leqslant x_3N} \sum_{b\leqslant x_1N} \sum_{\substack{c\leqslant x_2N \\ (a,b,c)=1}} f(a, b, c), \quad G = \sum_{a\leqslant x_3N} \sum_{b\leqslant x_1N} \sum_{\substack{c\leqslant x_2N \\ (a,b,c)=1}} \frac{8}{\pi}\sqrt{abc}. \tag{20}$$

Lemma 6. *Пусть* $x_1 > 0, x_2 > 0, \varepsilon > 0$ *—действительные числа. Тогда справедливо следующее равенство*

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leqslant \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(\delta_1,\delta_2) \int\limits_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int\limits_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{\substack{a \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta | a}} \frac{t_1 \lambda^*(a, \frac{t_2}{t_1}) + t_2 \lambda^*(a, \frac{t_1}{t_2})}{a} dt_1 dt_2 +$$

$$+ O\left(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}\right),$$

где

$$\delta = \text{НОК}\left(\frac{\delta_1}{(\delta_1, d_2)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, d_1)}\right).$$

Доказательство. Обозначим

$$d_1 = (a,b), d_2 = (a,c), a_1 = \frac{a}{(d_1 d_2)}, b_1 = \frac{b}{d_1}, c_1 = \frac{c}{d_2}.$$

Так как $(a,b,c) = 1$, то $(d_1, d_2) = 1$. Получаем

$$F = \sum_{a \leqslant x_3 N} \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{\substack{b \leqslant x_1 N \\ (b,a)=d_1}} \sum_{\substack{c \leqslant x_2 N \\ (c,a)=d_2}} f(d_1 d_2 a_1, d_1 b_1, d_2 c_1) =$$

$$\sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\substack{b_1 \leqslant \frac{x_1 N}{d_1} \\ (b_1, a_1 d_2)=1}} \sum_{\substack{c_1 \leqslant \frac{x_2 N}{d_2} \\ (c_1, a_1 d_1)=1}} d_1 d_2 f(a_1, b_1, c_1).$$

В последнем равенстве мы воспользовались тождеством Джонсона (см [11])

$$f(da, db, c) = d f(a,b,c).$$

Выражая функцию $f(a,b,c)$ через функцию Рёдсета, получим

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\substack{b_1 \leqslant \frac{x_1 N}{d_1} \\ (b_1, a_1 d_2)=1}} \sum_{\substack{c_1 \leqslant \frac{x_2 N}{d_2} \\ (c_1, a_1 d_1)=1}} \sum_{l=1}^{a_1}{}^{*} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l,a_1}(b_1, c_1) =$$

$$= \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \sum_{l=1}^{a_1}{}^{*} \sum_{\substack{b_1 \leqslant \frac{x_1 N}{d_1} \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leqslant \frac{x_2 N}{d_2} \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l,a_1}(b_1, c_1).$$

Используя лемму 2 из [2, §5], получаем

$$S_{l,a_1} = \sum_{\substack{b_1 \leqslant \frac{x_1 N}{d_1} \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leqslant \frac{x_2 N}{d_2} \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l,a_1}(b_1, c_1) =$$

$$= \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2} \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \rho_{l,a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O\left(\frac{x_1 x_2}{d_1 d_2} N^2 s_1\left(\frac{l}{a_1}\right)\right).$$

Следовательно,

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2} \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{l=1}^{a_1}{}^{*} \rho_{l,a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 +$$

$$+ O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \sum_{l=1}^{a_1}{}^{*} s_1\left(\frac{l}{a_1}\right) \right). \tag{21}$$

Для оценки остаточного члена воспользуемся леммой 1 и леммой 2, получаем

$$O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \sum_{l=1}^{a_1}{}^{*} s_1\left(\frac{l}{a_1}\right) \right) =$$

$$= O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \tau(d_1 a_1) \tau(d_2 a_1) a_1 \log^2 a_1 \right) =$$

$$= O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} (d_1 d_2)^{\varepsilon_1} \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} a_1^{1+\varepsilon} \right) = O\left(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon} \right).$$

Подставляя полученную оценку в (21) и используя формулы (13)—(16), получаем

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2}$$

$$\int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \left(t_1 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_2}{t_1}\right) + t_2 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_1}{t_2}\right) \right) dt_1 dt_2 + O\left(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon} \right). \tag{22}$$

Меняем порядок суммирования

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1,d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 \leqslant \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \sum_{\substack{a_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta_1 | d_2 a_1, \delta_2 | d_1 a_1}} (a_1, \delta_1, \delta_2)$$

$$\int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \frac{t_1 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_2}{t_1}\right) + t_2 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_1}{t_2}\right)}{a_1} dt_1 dt_2 + O\left(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon} \right). \tag{23}$$

Заметим, что $(\delta_1, \delta_2) | (d_1 a_1, d_2 a_1)$, но $(d_1 a_1, d_2 a_1) = a_1 (d_1, d_2) = a_1$. Следовательно, $(\delta_1, \delta_2) | a_1$, тогда

$$(a_1, \delta_1, \delta_2) = (a_1, (\delta_1, \delta_2)) = (\delta_1, \delta_2).$$

Условия $\delta_1 | d_2 a_1, \delta_2 | d_1 a_1$ равносильны условию $\delta | a_1$, где

$$\delta = \text{НОК}\left(\frac{\delta_1}{(\delta_1, d_2)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, d_1)} \right).$$

Тем самым лемма 6 доказана. □

Remark 3. *Справедливо следующее равенство*

$$G = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leqslant \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leqslant \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (\delta_1, \delta_2)$$

$$\int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{\substack{a \leqslant \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta | a}} \frac{8}{\pi} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}} \sqrt{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + O\left(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 6. □

Из леммы 6 следует, что для доказательства теоремы 4 необходимо исследовать сумму вида

$$\sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a}.$$

Используя формулу (18) получаем

$$\sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a} = \sum_{d_1 d_2 \leqslant R} \sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a, d_1 d_2 | a}} \mu(d_1)\mu(d_2) \frac{d_2}{a} \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \alpha}{d_2}\right) =$$

$$= \sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \sum_{\substack{a \leqslant R \\ \frac{\delta}{n} d_1 d_2 | a}} \mu(d_1)\mu(d_2) \frac{d_2}{a} \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \alpha}{d_2}\right) =$$

$$= \sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leqslant R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1} \sum_{\substack{a \leqslant \frac{R}{d_1 d_2} \\ \frac{\delta}{n} | a}} \frac{\lambda\left(a, \frac{d_1}{d_2}\alpha\right)}{a}. \tag{24}$$

Используя лемму 3, получаем

$$\sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \frac{\lambda(a, \alpha)}{a} = \frac{1}{R} \sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) + \int_1^R \frac{1}{t^2} \sum_{\substack{a \leqslant t \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) dt. \tag{25}$$

Следовательно, задача свелась к нахождению асимптотической формулы для суммы

$$\sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha).$$

Нахождению этой формулы и посвящены последующие разделы.

5 Разделение задачи на отдельные случаи

Используя формулу (10), из формулы (19) легко получить следующее равенство

$$\delta \sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \lambda(a,\alpha) = \sum_{z=1}^{\delta}\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q'\geqslant 1}\sum_{Q\geqslant 0}$$

$$[nQ'+kQ\leqslant R, \alpha(n-k)<Q\leqslant \alpha n]\exp\left(2\pi i\frac{nQ'+kQ}{\delta}z\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\sum_{z=1}^{\delta}\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q'\geqslant 1}\sum_{Q\geqslant 0}[nQ'+kQ\leqslant R, \alpha(n-k)<Q\leqslant \alpha n]$$

$$\exp\left(2\pi i\frac{nQ'}{\delta}z\right)\exp\left(2\pi i\frac{kQ}{\delta}z\right)(Q'+Q+\alpha k). \tag{26}$$

Разобьем область суммирования по переменным (n,k,Q',Q)

$$\begin{cases} nQ'+kQ\leqslant R,\\ \alpha(n-k)<Q\leqslant \alpha n,\\ 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0\leqslant Q, 1\leqslant Q'. \end{cases} \tag{27}$$

на пять подобластей. Тогда

$$\delta \sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \lambda(a,\alpha) = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5, \tag{28}$$

где Σ_i — сумма для i-го случая. Для этого введем параметры

$$U_1=\sqrt{\frac{R}{\alpha}}, \qquad U_2=\sqrt{R\alpha}. \tag{29}$$

Очевидно, что выполнено

$$U_1U_2=R \quad \text{и} \quad U_2=\alpha U_1. \tag{30}$$

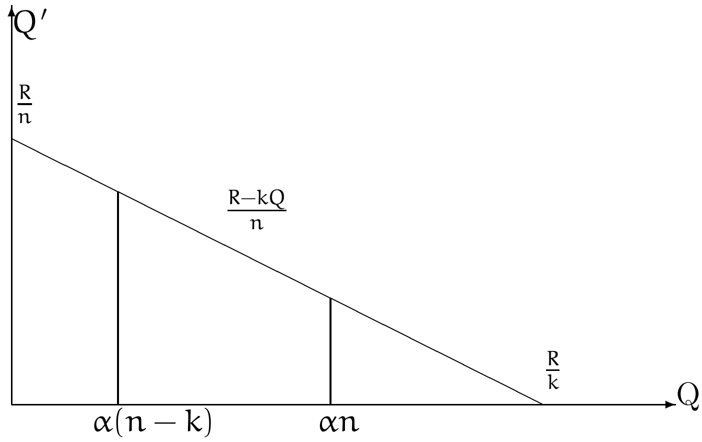
В Случаи 1 мы рассматриваем ситуацию, когда $n\leqslant U_1$. Следовательно, остальные случаи посвящены рассмотрению ситуации $n>U_1$, но тогда $Q'\leqslant U_2$. В Случаях 2 и 3 рассматривается ситуация, когда $k\leqslant U_1$, а в Случаях 4 и 5 рассматривается ситуация, когда $k>U_1$.

5.1 Случай 1

Пусть $n\leqslant U_1$ и внешнее суммирование ведется по области

$$\Omega_1=\{n\leqslant U_1, k\leqslant n\}.$$

Тогда переменные Q, Q' должны удовлетворять условиям



$$\alpha(n-k) < Q \leqslant \min\left(\alpha n, \frac{R}{k}\right), \qquad Q' \leqslant \frac{R-kQ}{n}.$$

В силу выбора параметров получаем внутреннее суммирование ведется по области

$$\Omega_{11} = \left\{\alpha(n-k) < Q \leqslant \alpha n, \qquad 1 \leqslant Q' \leqslant \frac{R-kQ}{n}\right\}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(n,k)\in\Omega_1} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right)(Q' + Q + \alpha k).$$

Следующее преобразование очевидно

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{n\leqslant U_1} \sum_{k\leqslant n} = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \delta|zn}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \delta|zk}} + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \delta|zn}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \delta\nmid zk}} + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \delta\nmid zn}} \sum_{k\leqslant n}.$$

Преобразуем первую сумму, учитывая, что мы суммируем функцию в которую z и δ входят только в виде $\frac{z}{\delta}$.

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \delta|zn}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \delta|zk}} = \sum_{d|\delta} \sum_{\substack{z=1\\ (\delta,z)=d}}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \frac{\delta}{d}|n}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \frac{\delta}{d}|k}} = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \tau|n}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \tau|k}}.$$

Аналогично для второй суммы получаем

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \delta|zn}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \delta\nmid zk}} = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{n\leqslant U_1\\ \tau|n}} \sum_{\substack{k\leqslant n\\ \tau\nmid k}}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1 \\ \tau|n,\tau|k}} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} (Q' + Q + \alpha k) +$$

$$+ \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1 \\ \tau|n,\tau\nmid k}} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\tau} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) +$$

$$+ \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1 \\ \delta\nmid zn}} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) (Q' + Q + \alpha k) =$$

$$= \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + \Sigma_{13}. \tag{31}$$

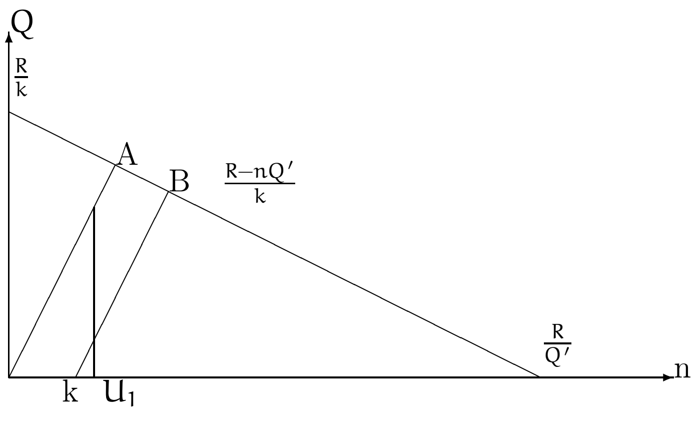
5.2 Случай 2

Пусть $n > U_1$, тогда $Q' \leqslant U_2$ и пусть $k \leqslant U_1$. Пусть также

$$U_1 \leqslant \frac{R}{Q' + \alpha k},$$

тогда внешнее суммирование ведется по области

$$\Omega_2 = \{k \leqslant U_1, \quad 1 \leqslant Q' \leqslant U_2 - \alpha k\}.$$



Пусть в плоскости (n, Q) A—точка пересечения прямых $Q = \alpha n$ и $Q = \frac{R - nQ'}{k}$, B—точка пересечения прямых $Q = \alpha(n - k)$ и $Q = \frac{R - nQ'}{k}$.Тогда их координаты

$$A\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}, \frac{R\alpha}{Q' + \alpha k}\right), \qquad B\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha\frac{R - \alpha Q'}{Q' + \alpha k}\right).$$

Внутреннее суммирование ведется по объединению непересекающихся областей

$$\Omega_{21} = \left\{U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q' + \alpha k}, \quad \alpha(n - k) < Q \leqslant \alpha n\right\}$$

и

$$\Omega_{22}=\left\{\frac{R}{Q'+\alpha k}<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k},\quad \alpha(n-k)<Q\leqslant\frac{R-nQ'}{k}\right\}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_2=\sum_{z=1}^{\delta}\sum_{(k,Q')\in\Omega_2}\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}+\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right)\exp\left(2\pi i\frac{zn}{\delta}Q'\right)\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k).$$

Проделывая преобразования аналогичные тем, что были сделаны для Σ_1 получаем

$$\Sigma_2=\sum_{\tau|\delta}\sum_{z=1}^{\tau}{}^{*}\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \tau|k,\tau|Q'}}\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}+\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right)(Q'+Q+\alpha k)+$$

$$r+\sum_{\tau|\delta}\sum_{z=1}^{\tau}{}^{*}\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \tau|k,\tau\nmid Q'}}\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}+\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right)\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k)+$$

$$+\sum_{z=1}^{\delta}\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \delta\nmid zk,}}\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}+\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right)\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\delta}n\right)\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\Sigma_{21}+\Sigma_{22}+\Sigma_{23}. \tag{32}$$

5.3 Случай 3

Пусть $n>U_1$,тогда $Q'\leqslant U_2$ и пусть $k\leqslant U_1$, а внешнее суммирование ведется по k,Q' и выполнено

$$\frac{R}{Q'+\alpha k}<U_1\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}.$$

Тогда внешнее суммирование ведется по области

$$\Omega_3=\left\{k\leqslant U_1,\quad U_2-\alpha k<Q'\leqslant U_2-\alpha k+\frac{\alpha k^2}{U_1}\right\},$$

а внутреннее по области

$$\Omega_{31}=\left\{U_1<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k},\quad \alpha(n-k)<Q\leqslant\frac{R-nQ'}{k}\right\}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_3=\sum_{z=1}^{\delta}\sum_{(k,Q')\in\Omega_3}\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}\exp\left(2\pi i\frac{zn}{\delta}Q'\right)\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k).$$

Проделывая преобразования аналогичные тем, что были сделаны для Σ_1, получаем

$$\Sigma_3 = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3 \\ \tau|k,\tau|Q'}} \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) +$$

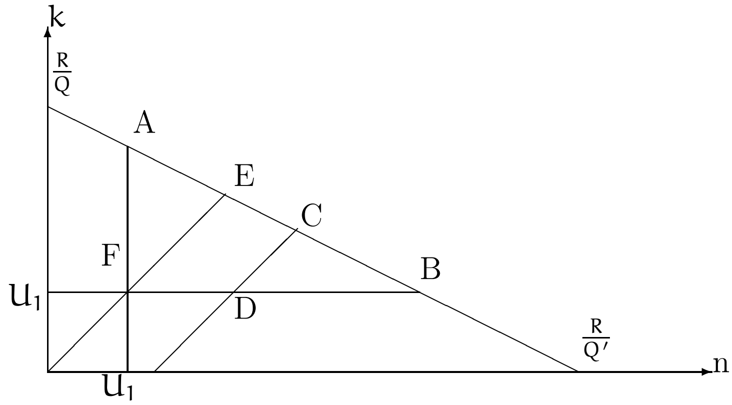
$$+ \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3 \\ \tau|k,\tau\nmid Q'}} \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) +$$

$$+ \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3 \\ \delta\nmid zk,}} \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) =$$

$$= \Sigma_{31} + \Sigma_{32} + \Sigma_{33}. \qquad (33)$$

5.4 Случай 4

Пусть $n > U_1$,тогда $Q' \leqslant U_2$. Пусть $k > U_1$, тогда $Q \leqslant U_2$. Будем вести внешнее суммирование по Q, Q'.



Пусть в плоскости (n, k) A,B,E,C—точки пересечения прямой $k = \frac{R-nQ'}{Q}$ соответственно с прямыми $n = U_1$, $k = U_1$, $k = n$, $k = n - \frac{Q}{\alpha}$. D—точка пересечения прямой $k = n - \frac{Q}{\alpha}$ с прямой $k = U_1$. F—точка пересечения прямой $k = U_1$ с прямой $n = U_1$. Точки имеют следующие координаты

$$A\left(U_1, \frac{R - U_1 Q'}{Q}\right), \quad B\left(\frac{R - U_1 Q}{Q'}, U_1\right), \quad C\left(\frac{R + Q^2/\alpha}{Q + Q'}, \frac{R - QQ'/\alpha}{Q + Q'}\right), \quad D\left(U_1 + \frac{Q}{\alpha}, U_1\right),$$

$$F(U_1, U_1), \quad E\left(\frac{R}{Q + Q'}, \frac{R}{Q + Q'}\right).$$

Чтобы $\triangle AFB$ был невырожденным необходимо

$$Q + Q' \leqslant U_2.$$

Рассмотрим случай, когда C принадлежит отрезку AB, следовательно

$$\frac{R + Q^2/\alpha}{Q + Q'} \leqslant \frac{R - U_1 Q}{Q'}.$$

Получаем

$$Q' \leqslant \frac{R - U_1 Q}{U_1 + Q/\alpha} = U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q}$$

и условие $Q + Q' \leqslant U_2$ выполнено. Тогда внешнее суммирование ведется по области

$$\Omega_4 = \left\{ Q \leqslant U_2, \quad Q' \leqslant U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} \right\},$$

а внутреннее по области FECD, которую мы разбиваем следующим образом

$$\mathsf{FECD} = \Omega_{41} + \Omega_{42} - \Omega_{43},$$

где

$$\Omega_{41} = \left\{ U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q + Q'}, \quad U_1 < k \leqslant n \right\},$$

$$\Omega_{42} = \left\{ \frac{R}{Q + Q'} < n \leqslant \frac{R + Q^2/\alpha}{Q + Q'}, \quad U_1 < k \leqslant \frac{R - nQ'}{Q} \right\},$$

$$\Omega_{43} = \left\{ U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leqslant \frac{R + Q^2/\alpha}{Q + Q'}, \quad U_1 < k \leqslant n - \frac{Q}{\alpha} \right\}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_4 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(Q,Q') \in \Omega_4} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k).$$

Проделывая преобразования аналогичные тем, что были сделаны для Σ_1 получаем

$$\Sigma_4 = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_4 \\ \tau|Q, \tau|Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) (Q' + Q + \alpha k) +$$

$$+ \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_4 \\ \tau|Q, \tau\nmid Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) +$$

$$+ \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_4 \\ \delta\nmid zk,}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) =$$

$$= \Sigma_{41} + \Sigma_{42} + \Sigma_{43}. \tag{34}$$

5.5 Случай 5

Пусть $n > U_1$,тогда $Q' \leqslant U_2$. Пусть $k > U_1$, тогда $Q \leqslant U_2$. Будем вести внешнее суммирование по Q, Q'. Рассмотрим случай, когда C не принадлежит отрезку AB, следовательно

$$\frac{R + Q^2/\alpha}{Q + Q'} > \frac{R - U_1 Q}{Q'}.$$

Получаем
$$Q' > \frac{R - U_1 Q}{U_1 + Q/\alpha} = U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q}$$
и условие $Q + Q' \leqslant U_2$ необходимо учитывать. Тогда внешнее суммирование ведется по области
$$\Omega_5 = \left\{ Q \leqslant U_2, \quad U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q \leqslant U_2 - Q \right\},$$
а внутреннее по $\triangle \mathsf{FBE}$, который мы разбиваем следующим образом
$$\mathsf{FBE} = \Omega_{51} + \Omega_{52},$$
где
$$\Omega_{51} = \left\{ U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q + Q'}, \quad U_1 < k \leqslant n \right\},$$
$$\Omega_{52} = \left\{ \frac{R}{Q + Q'} < n \leqslant \frac{R - U_1 Q}{Q'}, \quad U_1 < k \leqslant \frac{R - nQ'}{Q} \right\}.$$
Следовательно,
$$\Sigma_5 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_5} \left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} + \sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k).$$
Проделывая преобразования аналогичные тем, что были сделаны для Σ_1 получаем
$$\Sigma_5 = \sum_{\tau|\delta} \sideset{}{^*}\sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5 \\ \tau|Q, \tau|Q'}} \left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} + \sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \right) (Q' + Q + \alpha k) +$$
$$+ \sum_{\tau|\delta} \sideset{}{^*}\sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5 \\ \tau|Q, \tau\nmid Q'}} \left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} + \sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) +$$
$$+ \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4 \\ \delta\nmid zk,}} \left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} + \sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) =$$
$$= \Sigma_{51} + \Sigma_{52} + \Sigma_{53}. \tag{35}$$

6 Вычисление сумм первого типа

В этом параграфе мы вычислим $\Sigma_{11}, \Sigma_{21}, \Sigma_{31}, \Sigma_{41}, \Sigma_{51}$.

6.1 Случай 1

Lemma 7. *Справедлива следующая асимптотическая формула*
$$\Sigma_{11} = \frac{53}{150} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2}{\tau^2} \log \frac{U_1}{\tau} \right),$$
где Σ_{11} *определена в* (31).

Доказательство. Производя суммирование по переменной Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant \frac{R-kQ}{n}} (Q'+Q+\alpha k) = (Q+\alpha k)\frac{R-kQ}{n} + \frac{(R-kQ)^2}{2n^2} + O\left(Q+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-kQ}{n}\right) =$$

$$= Q^2\left(\frac{k^2}{2n^2}-\frac{k}{n}\right) + Q\left(\frac{R}{n}-\frac{\alpha k^2}{n}-R\frac{k}{n^2}\right) + \left(\alpha R\frac{k}{n}+\frac{R^2}{2n^2}\right) + O\left(Q+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-kQ}{n}\right).$$

Далее необходимо просуммировать полученное выражение по переменной Q. Учитывая, что

$$(n,k)\in\Omega_1 = \{n\leqslant U_1, k\leqslant n\} \quad \text{и} \quad U_1 = \sqrt{\frac{R}{\alpha}},$$

получаем следующие соотношения, необходимые для получения оценки остаточного члена

$$\left|\frac{k^2}{2n^2}-\frac{k}{n}\right|\alpha^2 n^2 \ll \alpha^2 kn, \quad \left|\frac{R}{n}-\frac{\alpha k^2}{n}-R\frac{k}{n^2}\right|\alpha n \ll \alpha R, \quad \left|\alpha R\frac{k}{n}+\frac{R^2}{2n^2}\right| \ll \frac{R^2}{n^2},$$

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n} (Q+\alpha k) \ll \alpha^2 nk, \qquad \sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n} \frac{R-kQ}{n} \ll \frac{R}{n}\alpha k,$$

$$\alpha^2 kn + \alpha R + \frac{R}{n}\alpha k \ll \frac{R^2}{n^2},$$

Напомним, что

$$\Omega_{11} = \left\{\alpha(n-k) < Q \leqslant \alpha n, \qquad 1\leqslant Q' \leqslant \frac{R-kQ}{n}\right\}.$$

Применяя следствие 3 (a) (см. Приложение), получаем

$$\sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} (Q'+Q+\alpha k) = \frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{k^2}{2n^2}-\frac{k}{n}\right)(n^3-(n-k)^3) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{R}{n}-\frac{\alpha k^2}{n}-\frac{Rk}{n^2}\right)(n^2-(n-k)^2) + \alpha k\left(\alpha R\frac{k}{n}+\frac{R^2}{2n^2}\right) + O\left(\frac{R^2}{n^2}\right) =$$

$$= \alpha^3\left(\frac{k^3}{2}-\frac{k^4}{3n}+\frac{k^5}{6n^2}-nk^2\right) + \alpha^2\left(Rk - R\frac{k^2}{2n} + R\frac{k^3}{2n^2}\right) + \alpha R^2\frac{k}{2n^2} + O\left(\frac{R^2}{n^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по переменным

$$(n,k)\in\Omega_1, \tau|n, \tau|k,$$

получаем

$$\sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1\\ \tau|n,\tau|k}} \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}} (Q'+Q+\alpha k) =$$

$$= \sum_{n\leqslant\frac{U_1}{\tau}} \sum_{k\leqslant n} \alpha^3\tau^3\left(\frac{k^3}{2}-\frac{k^4}{3n}+\frac{k^5}{6n^2}-nk^2\right) + \alpha^2\tau\left(Rk - R\frac{k^2}{2n} + R\frac{k^3}{2n^2}\right) + \alpha R^2\frac{k}{2n^2\tau} + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n^2}\right).$$

Применяя следствие 3 (a) (см. Приложение) сначала при суммировании по k, а потом при суммировании по n, получаем

$$\sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1\\ \tau|n,\tau|k}}\ \sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}}(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\sum_{n\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(\alpha^3\tau^3\left(\frac{n^4}{8}-\frac{n^4}{15}+\frac{n^4}{36}-\frac{n^4}{3}+O(n^3)\right)+\alpha^2\tau\left(R\frac{n^2}{2}-R\frac{n^2}{6}+R\frac{n^2}{8}+O(Rn)\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha R^2\frac{1}{4\tau}+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau n}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(-\frac{89}{360}\alpha^3\tau^3n^4+\frac{11}{24}\alpha^2\tau Rn^2+\frac{\alpha R^2}{4\tau}+O\left(\alpha^3\tau^3n^3+\alpha^2\tau Rn+\frac{\alpha R^2}{\tau n}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n}\right)\right)=$$

$$=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(-\frac{89}{5\cdot 360}+\frac{11}{3\cdot 24}+\frac{1}{4}\right)+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\right)+\frac{R^2}{\tau^2}\log\frac{U_1}{\tau}\right)=$$

$$=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\frac{53}{150}+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\right)+\frac{R^2}{\tau^2}\log\frac{U_1}{\tau}\right).$$

Используя определение функции Эйлера

$$\varphi(\tau)=\sum_{z=1}^{\tau}{}^{*}\,1,$$

получаем асимптотическую формулу для Σ_{11}

$$\Sigma_{11}=\frac{53}{150}R^{5/2}\sqrt{\alpha}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\right)+\frac{R^2}{\tau^2}\log\frac{U_1}{\tau}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

6.2 Случай 2

Lemma 8. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{21}=\frac{19}{75}R^{5/2}\sqrt{\alpha}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)+\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\log\frac{U_1}{\tau}\right),$$

где Σ_{21} определена в (32).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по областям

$$\Omega_{21}=\left\{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q'+\alpha k},\quad \alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n\right\}$$

и

$$\Omega_{22}=\left\{\frac{R}{Q'+\alpha k}<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k},\quad \alpha(n-k)<Q\leqslant\frac{R-nQ'}{k}\right\}.$$

1. Вычислим сумму $\sum\limits_{(n,Q)\in\Omega_{21}} (Q'+Q+\alpha k)$.

$$\sum_{U_1<n\leqslant \frac{R}{Q'+\alpha k}} \ \sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant \alpha n} (Q'+Q+\alpha k) =$$

$$\sum_{U_1<n\leqslant \frac{R}{Q'+\alpha k}} \left(\alpha^2 nk+\alpha^2\frac{k^2}{2}+\alpha kQ'+O\left(\alpha n\right)+O\left(Q'+\alpha k\right)\right) =$$

$$= \left(\alpha^2\frac{k^2}{2}+\alpha kQ'\right)\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}-U_1\right)+\frac{\alpha^2 k}{2}\left(\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}-U_1^2\right)+O\left(\alpha^2 k\frac{R}{Q'+\alpha k}\right)+$$

$$+O\left(\alpha^2 k^2+\alpha kQ'\right)+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right)+O\left(R\right) =$$

$$= \alpha k\left(R-U_1(Q'+\alpha k)\right)-\frac{\alpha^2 k^2}{2}\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}-U_1\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2 k}{2}\left(\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}-U_1^2\right)+O\left(\alpha^2 k\frac{R}{Q'+\alpha k}\right)+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right).$$

Мы воспользовались тем, что из

$$Q'\leqslant U_2-\alpha k$$

следует

$$\alpha k(Q'+\alpha k)\leqslant \alpha^2 k\frac{R}{Q'+\alpha k},$$

$$R\leqslant \alpha\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}.$$

2. Вычислим сумму $\sum\limits_{(n,Q)\in\Omega_{22}} (Q'+Q+\alpha k)$.

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant \frac{R-nQ'}{k}} (Q'+Q+\alpha k) = (Q'+\alpha k)\left(\frac{R-nQ'}{k}-\alpha(n-k)\right)+O\left(Q'+\alpha k\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{k^2}-\alpha^2(n-k)^2\right)+O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right) =$$

$$= \frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k}+Q'\right)-n\frac{Q'}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k}+Q'+\alpha k\right)+\frac{n^2}{2}\frac{Q'^2-\alpha^2 k^2}{k^2}+$$

$$O\left(Q'+\alpha k\right)+O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right). \tag{36}$$

При суммировании по n воспользуемся следствием 2 (см. Приложение). В данном случае определим функцию $f(x)$ следующим образом

$$f(x) = \frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k}+Q'\right)-x\frac{Q'}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k}+Q'+\alpha k\right)+\frac{x^2}{2}\frac{Q'^2-\alpha^2 k^2}{k^2}. \tag{37}$$

Используя предыдущее равенство, легко получить другое выражение для функции $f(x)$

$$f(x) = (Q'+\alpha k)\left(\frac{R-xQ'}{k}-\alpha(x-k)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{(R-xQ')^2}{k^2}-\alpha^2(x-k)^2\right) \tag{38}$$

Дифференцируя формулу (37) получаем

$$f'(x) = -\frac{Q'}{k}\left(\frac{R}{k}+\alpha k\right) - \frac{Q'}{k}\left(Q'+\alpha k\right) + x\left(\frac{Q'}{k}-\alpha\right)\frac{Q'+\alpha k}{k}$$

Следовательно,

$$f'\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}\right) = -\frac{Q'}{k}\left(\frac{R}{k}+\alpha k\right) - \frac{Q'}{k}\left(Q'+\alpha k\right) + \frac{R}{k}\left(\frac{Q'}{k}-\alpha\right) =$$
$$= -Q'\alpha - \frac{Q'}{k}\left(Q'+\alpha k\right) - \frac{R\alpha}{k} < 0$$

и

$$f'\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\right) = -\frac{Q'}{k}\left(\frac{R}{k}+\alpha k\right) - \frac{Q'}{k}\left(Q'+\alpha k\right) + \frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{Q'}{k}-\alpha\right) =$$
$$= -\frac{Q'}{k}\left(Q'+\alpha k\right) - \frac{R+\alpha k^2}{k}\alpha < 0.$$

Получаем, что $f(x)$ монотонно убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q'+\alpha k} < x \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}.$$

Из формулы (38) получаем

$$f\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}} (Q'+Q+\alpha k) = \int_{\frac{R}{Q'+\alpha k}}^{\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} f(x)dx + O\left(f\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{\frac{R}{Q'+\alpha k}<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \left(O\left(Q'+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right)\right).$$

Вычислим интеграл, используя формулу (37). Интегрируя каждое слагаемое формулы (37), получаем

$$\int_{\frac{R}{Q'+\alpha k}}^{\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} f(x)dx = \frac{\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k}+Q'\right) -$$
$$-\frac{Q'}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k}+Q'+\alpha k\right)\frac{(R+\alpha k^2)^2-R^2}{2(Q'+\alpha k)^2} + \frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{k^2}\frac{(R+\alpha k^2)^3-R^3}{6(Q'+\alpha k)^3}.$$

Преобразовывая отдельно каждое слагаемое, получаем

$$\int_{\frac{R}{Q'+\alpha k}}^{\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} f(x)dx = \alpha k\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\left(Q'+\alpha k+\frac{R-\alpha k^2}{2k}\right) -$$
$$-\left(\frac{Q'+\alpha k}{k}-\alpha\right)\left(\frac{R+\alpha k^2}{k}+Q'+\alpha k\right)\frac{(R+\alpha k^2)^2-R^2}{2(Q'+\alpha k)^2} +$$
$$+\frac{(R+\alpha k^2)^3-R^3}{6(Q'+\alpha k)^2k^2}\left(Q'+\alpha k-2\alpha k\right).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по одинаковым степеням $(Q' + \alpha k)$, получаем

$$\int_{\frac{R}{Q'+\alpha k}}^{\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} f(x)dx = \alpha k(R + \alpha k^2) - \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2k} +$$

$$+\frac{1}{Q' + \alpha k}\left(\frac{\alpha(R + \alpha k^2)(R - \alpha k^2)}{2} - \left(\frac{R + \alpha k^2}{k^2} - \alpha\right)\frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2} + \frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{6k^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{(Q' + \alpha k)^2}\left(\alpha\frac{R + \alpha k^2}{k}\frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2} - \alpha\frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{3k}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 k^3}{2} - \frac{1}{Q' + \alpha k}\frac{\alpha^3 k^4}{3} + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2}\left(R\frac{\alpha^3 k^3}{2} + \frac{\alpha^4 k^5}{6}\right).$$

Вычислим асимптотический член суммы $\sum\limits_{(n,Q)\in\Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k)$.

(a) Используя формулу (38), получаем

$$f\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right) = (Q' + \alpha k)\alpha k + \frac{\alpha k}{2}\left(\frac{2R\alpha}{Q' + \alpha k} - \alpha k\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 k^2}{2} + \alpha k Q' + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k},$$

(b)

$$\sum_{\frac{R}{Q'+\alpha k} < n \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} (Q' + \alpha k) = O(\alpha k^2),$$

(c)

$$\sum_{\frac{R}{Q'+\alpha k} < n \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right) = O\left(\frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k}\right).$$

Учитывая неравенства $k \leqslant U_1, Q' \leqslant U_2 - \alpha k$ и формулы (30) и (29), получаем

$$\frac{\alpha^2 k^2}{2} + \alpha k Q' + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} \leqslant \alpha k\left(Q' + \alpha k + \frac{R\alpha}{Q' + \alpha k}\right) \leqslant \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}$$

и

$$\alpha k^2 \leqslant \frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k) = \frac{\alpha^2 k^3}{2} - \frac{1}{Q' + \alpha k}\frac{\alpha^3 k^4}{3} + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2}\left(R\frac{\alpha^3 k^3}{2} + \frac{\alpha^4 k^5}{6}\right) +$$

$$+O\left(\frac{R\alpha k}{(Q' + \alpha k)} + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}\right).$$

Получаем

$$\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}} + \sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right)(Q'+Q+\alpha k) = \alpha k\,(R - U_1(Q'+\alpha k)) - \frac{\alpha^2k^2}{2}\left(\frac{R}{Q'+\alpha k} - U_1\right) +$$
$$\frac{\alpha^2 k}{2}\left(\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2} - U_1^2\right) + \frac{\alpha^2k^3}{2} - \frac{1}{Q'+\alpha k}\frac{\alpha^3k^4}{3} + \frac{1}{(Q'+\alpha k)^2}\left(R\frac{\alpha^3k^3}{2} + \frac{\alpha^4k^5}{6}\right) +$$
$$+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q'+\alpha k)^2} + \frac{R\alpha^2 k}{Q'+\alpha k}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_2 = \{k \leqslant U_1, \quad Q' \leqslant U_2 - \alpha k\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \mid Q'.$$

Получаем

$$\sum_{k\leqslant \frac{U_1}{\tau}} \sum_{Q'\leqslant \alpha\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)} \left(\alpha\tau R k + \frac{\alpha^2\tau^2U_1}{2}k^2 - \frac{\alpha^2\tau U_1^2}{2}k + \frac{\alpha^2\tau^3}{2}k^3 - \alpha\tau^2U_1k(Q'+\alpha k) -\right.$$
$$-\frac{1}{Q'+\alpha k}\left(\frac{R\alpha^2\tau}{2}k^2 + \frac{\alpha^3\tau^3}{3}k^4\right) + \frac{1}{(Q'+\alpha k)^2}\left(\frac{R^2\alpha^2}{2\tau}k + \frac{R\alpha^3\tau}{2}k^3 + \frac{\alpha^4\tau^3}{6}k^5\right) +$$
$$\left. +O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2(Q'+\alpha k)^2} + \frac{R\alpha^2 k}{Q'+\alpha k}\right)\right).$$

Используя следствие 2 (a) (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q'\leqslant \alpha\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)} (Q'+\alpha k) = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{U_1^2}{\tau^2} - k^2\right) + O\left(\frac{\alpha U_1}{\tau}\right),$$

$$\sum_{Q'\leqslant \alpha\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)} \frac{1}{Q'+\alpha k} = \log\frac{U_1}{\tau k} + O\left(\frac{1}{\alpha k}\right),$$

$$\sum_{Q'\leqslant \alpha\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)} \frac{1}{(Q'+\alpha k)^2} = \frac{1}{\alpha k} - \frac{\tau}{\alpha U_1} + O\left(\frac{1}{\alpha^2k^2}\right),$$

$$\sum_{Q'\leqslant \alpha\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)} 1 = \frac{\alpha U_1}{\tau} - \alpha k + O(1).$$

Применяя эти соотношения, получаем

$$\sum_{k\leqslant \frac{U_1}{\tau}}\left(\frac{R^2\alpha}{2\tau} + k\left(\alpha^2RU_1 - \frac{\alpha^3U_1^3}{2} - \frac{\alpha^3U_1^3}{2} - \frac{R^2\alpha}{2U_1}\right) + k^2\left(\frac{\alpha^3\tau U_1^2}{2} - \alpha^2\tau R + \frac{\alpha^3\tau U_1^2}{2} + \frac{R\alpha^2\tau}{2}\right) +\right.$$
$$+k^3\left(\frac{\alpha^3\tau^2U_1}{2} - \frac{\alpha^3\tau^2U_1}{2} + \frac{\alpha^3\tau^2U_1}{2} - \frac{R\alpha^2\tau^2}{2}\right) + k^4\left(-\frac{\alpha^3\tau^3}{2} + \frac{\alpha^3\tau^3}{6}\right) -$$
$$\left.-\frac{\alpha^3\tau^4}{6U_1}k^5 - \left(\frac{R\alpha^2\tau}{2}k^2 + \frac{\alpha^3\tau^3}{3}k^4\right)\log\frac{U_1}{\tau k}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau}\log\frac{U_1}{\tau}\right).$$

При суммировании асимптотических слагаемых мы воспользовались пунктами (a) и (b) следствия 3 (см. Приложение) и оценкой

$$\sum_{k\leqslant \frac{U_1}{\tau}} \frac{1}{k} = O(\log \frac{U_1}{\tau}).$$

Используя пункты (a) и (b) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{k\leqslant \frac{U_1}{\tau}} \left(\frac{R^2\alpha}{2\tau} - \frac{\alpha^3 U_1^3}{2}k + \frac{\alpha^3\tau U_1^2}{2}k^2 - \frac{\alpha^3\tau^3}{3}k^4 - \frac{\alpha^3\tau^4}{6U_1}k^5 - \left(\frac{R\alpha^2\tau}{2}k^2 + \frac{\alpha^3\tau^3}{3}k^4 \right) \log \frac{U_1}{\tau k} \right) +$$

$$+O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau}\log\frac{U_1}{\tau} \right) = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} - \frac{1}{75} \right)$$

$$+O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau}\log\frac{U_1}{\tau} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \tau|k,\tau|Q'}} \left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}} + \sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}} \right) (Q'+Q+\alpha k) =$$

$$= \frac{19}{75}\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\log\frac{U_1}{\tau} \right).$$

Подставляя полученное выражение в формулу

$$\Sigma_{21} = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau}{}^{*} \sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \tau|k,\tau|Q'}} \left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}} + \sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}} \right) (Q'+Q+\alpha k),$$

получаем утверждение леммы. □

6.3 Случай 3

Lemma 9. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{31} = \left(\frac{2\pi}{15} - \frac{2\log 2}{5} - \frac{91}{900} \right) R^{5/2}\sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) \right),$$

где Σ_{31} *определена в* (33).

Доказательство. Напомним, что внутреннее суммирование ведется по области

$$\Omega_{31} = \left\{ U_1 < n \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}, \quad \alpha(n-k) < Q \leqslant \frac{R-nQ'}{k} \right\}.$$

Заметим, что внутреннее суммирование по Q аналогично одному из случаев в лемме 8. По-этому

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant \frac{R-nQ'}{k}} (Q'+Q+\alpha k) = f(n) + O(Q'+\alpha k) + O\left(\frac{R-nQ'}{k} \right),$$

где $f(n)$ определяется формулой (37). При суммировании по n воспользуемся следствием 2 (см. Приложение). Определим функцию $F_1(k, Q')$

$$F_1(k,Q') = \frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{6k^2}\left(\frac{(R+\alpha k^2)^3}{(Q'+\alpha k)^3} - U_1^3\right) -$$
$$-\frac{Q'}{2k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k\right)\left(\frac{(R+\alpha k^2)^2}{(Q'+\alpha k)^2} - U_1^2\right) +$$
$$+\frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k} + Q'\right)\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k} - U_1\right), \tag{39}$$

тогда

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} (Q'+Q+\alpha k) = F_1(k,Q') + O\left(f(U_1)\right) + \sum_{U_1<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \left(O\left(Q'+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right)\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(k,Q') \in \Omega_3 = \left\{k \leqslant U_1, \quad U_2 - \alpha k < Q' \leqslant U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}\right\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \mid Q'.$$

Учитывая эти ограничения и формулы (30), (29), получаем

$$\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \left(O\left(Q'+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right)\right) \ll O\left(R\right) + O\left(\frac{R^2}{k(Q'+\alpha k)}\right),$$

$$f(U_1) = \frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k} + Q'\right) - U_1\frac{Q'}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k\right) +$$
$$+\frac{U_1^2}{2}\left(\frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{k^2}\right) \ll \frac{R}{k}\frac{R}{k} + U_1\frac{Q'}{k}\frac{R}{k} + \frac{U_1^2U_2^2}{k^2} = \frac{R^2}{k^2}.$$

Получаем

$$O\left(f(U_1)\right) + \sum_{u_1<n\leqslant\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \left(O\left(Q'+\alpha k\right) + O\left(\frac{R-nQ'}{k}\right)\right) \leqslant O\left(\frac{R^2}{k(Q'+\alpha k)}\right) + O\left(\frac{R^2}{k^2}\right).$$

Определим функцию $F_2(k, Q')$ следующим образом. Разложим в $F_1(k, Q')$ слагаемые по степеням $(Q' + \alpha k)$

$$F_1(k,Q') = \frac{(R+\alpha k^2)^3}{k^2(Q'+\alpha k)^2}\left(\frac{Q'-\alpha k}{6} - \frac{Q'}{2}\right) + \frac{(R+\alpha k^2)^3}{2k^2(Q'+\alpha k)} +$$
$$+\frac{(R+\alpha k^2)^3}{2k}\frac{Q'}{Q'+\alpha k} - \frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{6k^2}U_1^3 +$$
$$+\frac{U_1^2}{2k}\left(Q'(Q'+\alpha k) + \frac{R+\alpha k^2}{k}Q'\right) - U_1\frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{2k} + Q'\right) =$$
$$= -\frac{(R+\alpha k^2)^3}{3k^2(Q'+\alpha k)} + \frac{(R+\alpha k^2)^3\alpha k}{6k^2(Q'+\alpha k)^2} + \frac{(R+\alpha k^2)^3}{2k^2(Q'+\alpha k)} +$$
$$+\frac{(R+\alpha k^2)^2}{2k} - \frac{(R+\alpha k^2)^2\alpha k}{2k(Q'+\alpha k)} - \frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{6k^2}U_1^3 +$$
$$+\frac{U_1^2}{2k}\left((Q'+\alpha k)^2 + \frac{R}{k}(Q'+\alpha k) - (R+\alpha k^2)\alpha\right) - U_1\frac{R+\alpha k^2}{k}\left(\frac{R-\alpha k^2}{2k} + (Q'+\alpha k)\right).$$

и пусть

$$F_2(k,Q') = F_1(\tau k, \tau Q').$$

Тогда, проделав элементарные преобразования с $F_1(k,Q')$, получаем

$$F_2(k,Q') = \frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3}{6\tau^3k^2}\frac{1}{Q'+\alpha k}+$$
$$+\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3\alpha}{6\tau^3k}\frac{1}{(Q'+\alpha k)^2}-\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2\alpha}{2\tau}\frac{1}{Q'+\alpha k}+\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{2\tau k}-\frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{6k^2}U_1^3+$$
$$+\frac{U_1^2}{2\tau k}\left(\tau^2(Q'+\alpha k)^2+\frac{R}{k}(Q'+\alpha k)-(R+\alpha\tau^2k^2)\alpha\right)-U_1\frac{R+\alpha\tau^2k^2}{\tau k}\left(\frac{R-\alpha\tau^2k^2}{2\tau k}+\tau(Q'+\alpha k)\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau|Q'}}\ \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}(Q'+Q+\alpha k)=$$
$$=\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\ \sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}\left(F_2(k,Q')+O\left(\frac{R^2}{\tau^2k(Q'+\alpha k)}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau^2k^2}\right)\right).$$

Легко проверить, что функция $F_2(k,Q')$ не является монотонной по переменной Q'. Поэтому непосредственное применение следствия 2 невозможно. Однако, в данном случаи утверждение следствия 2 оказывается верным. Заметим, что уравнение

$$\frac{\partial F_2(k,Q')}{\partial Q'}=0$$

имеет конечное число решений на нашем полуинтервале. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}\rho(x)F_2'(k,x)dx\right|\ll\max_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}|F_2(k,Q')|.$$

Функция $F_1(k,Q')$ является главным членом в асимптотической формуле для

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}(Q'+Q+\alpha k).$$

Поэтому $F_1(k,Q')>0$, следовательно, и $F_2(k,Q')>0$. Так как

$$U_2<Q'+\alpha k\leqslant 2U_2,$$

а область суммирования максимальна при $Q'=U_2-\alpha k$, то

$$\max_{U_2-\alpha k<Q'\leqslant U_2-\alpha k+\frac{\alpha k^2}{U_1}}F_1(k,Q')\ll F_1\left(k,U_2-\alpha k\right).$$

Следовательно,

$$\max_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}|F_2(k,Q')|\ll F_2\left(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k\right).$$

Из формулы (39) следует, что

$$F_2\left(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}\right)=F_1\left(\tau k,U_2-\alpha\tau k+\frac{\alpha\tau^2k^2}{U_1}\right)=0,$$

получаем

$$\sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}F_2(k,Q')=\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}F_2(k,Q')dQ'+O\left(F_2(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k)\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau|Q'}}\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}(Q'+Q+\alpha k)=\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}F_2(k,Q')dQ'+O\left(F_2(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}\left(O\left(\frac{R^2}{\tau^2k(Q'+\alpha k)}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau^2k^2}\right)\right).$$

Просуммируем полученные асимптотические слагаемые.

1. Используя соотношение $F_2(k,Q')=F_1(\tau k,\tau Q')$ и формулу (39), в которой мы заменим
$$\frac{Q'}{2k}\left(\frac{R+\alpha k^2}{k}+Q'+\alpha k\right)=\frac{1}{2k}\left((Q'+\alpha k)^2+\frac{R}{k}Q'-\alpha^2k^2\right),$$
получаем
$$F_2\left(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k\right)=\frac{1}{6k^2}\frac{U_2}{\tau}(\frac{U_2}{\tau}-2\alpha k)\left(\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3}{U_2^3}-U_1^3\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\tau k^2}(\frac{U_2}{\tau}-\alpha k)-\alpha^2\tau k+\frac{U_2^2}{\tau k}\right)\left(\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{U_2^2}-U_1^2\right)+$$
$$+\left(\frac{R^2-\alpha^2\tau^4k^4}{2\tau^2k^2}+\frac{R+\alpha\tau^2k^2}{\tau k}U_2\right)\left(\frac{R+\alpha\tau^2k^2}{U_2}-U_1\right)$$
Применяя формулы разности квадратов и кубов и формулы (29), (30), получаем
$$F_2\left(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k\right)=\frac{\alpha^2\tau}{6}\left(\frac{U_1}{\tau}-2k\right)\left(\left(U_1+\frac{\tau^2k^2}{U_1}\right)^2+\frac{R}{\alpha}+\tau^2k^2+U_1^2\right)-$$
$$-\left(\frac{R\alpha}{\tau k^2}\left(\frac{U_1}{\tau}-k\right)+\frac{\alpha^2}{\tau k}(U_1^2-\tau^2k^2)\right)\left(\tau^2k^2+\frac{\tau^4k^4}{2U_1^2}\right)+\frac{R^2-\alpha^2\tau^4k^4}{2U_1}+\left(R+\alpha\tau^2k^2\right)\alpha\tau k.$$
Так как $k\leqslant U_1/\tau$, легко получить
$$O\left(F_2(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k)\right)<O(RU_1\alpha).$$
Следовательно,
$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}O\left(F_2(k,\frac{U_2}{\tau}-\alpha k)\right)=O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

2. Используя асимптотические формулу

$$\sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} \frac{1}{Q'+\alpha k} = \log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)+O\left(\frac{\tau}{U_2}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant a}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^2}{a^2}\right)=O(1),$$

получаем

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\ \sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k(Q'+\alpha k)}\right)=$$
$$=\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)\right)=O\left(\frac{R^2}{\tau^2}\right).$$

3. Очевидно, что

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\ \sum_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k<Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k^2}\right)=O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau^2}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau|Q'}}\ \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}(Q'+Q+\alpha k)=\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\ \int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} F_2(k,Q')dQ'+O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\right).$$

Вычислим интеграл.

$$\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}\frac{1}{(Q'+\alpha k)}dQ'=\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right), \tag{40}$$

$$\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}}\frac{1}{(Q'+\alpha k)^2}dQ'=\frac{\tau}{U_2}-\frac{U_1\tau}{R+\alpha\tau^2k^2}=\frac{\alpha\tau^3k^2}{U_2(R+\alpha\tau^2k^2)}, \tag{41}$$

$$\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} \left(-\frac{Q'^2-\alpha^2k^2}{6k^2}U_1^3+\frac{U_1^2}{2}\left(\frac{\tau}{k}(Q'+\alpha k)^2+\frac{R}{\tau k^2}(Q'+\alpha k)-(R+\alpha\tau^2k^2)\frac{\alpha}{\tau k}\right)-\right.$$

$$\left.-U_1\frac{R+\alpha\tau^2k^2}{\tau k}\left(\frac{R-\alpha\tau^2k^2}{2\tau k}+\tau(Q'+\alpha k)\right)\right)dQ'=$$

$$=-\frac{U_1^3}{6k^2}\left(\frac{\alpha^3U_1}{\tau}k^2+\frac{\tau\alpha^3}{U_1}k^4+\frac{\tau^3\alpha^3}{3U_1^3}k^6-\frac{\tau^2\alpha^3}{U_1^2}k^5-2\alpha^3k^3\right)+\frac{U_1^2}{2}\left(\frac{R}{2\tau k^2}\left(\frac{\tau^2\alpha^2}{U_1^2}k^4+2\alpha^2k^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau}{3k}\left(\frac{3}{\tau}\alpha^3U_1k^2+3\tau\frac{\alpha^3}{U_1}k^4+\frac{\tau^3\alpha^3}{U_1^3}k^6\right)-(R+\alpha\tau^2k^2)\frac{\alpha}{\tau k}\frac{\alpha\tau}{U_1}k^2\right)-$$

$$-U_1\left(\frac{R^2-\alpha^2\tau^4k^4}{2\tau^2k^2}\frac{\alpha\tau}{U_1}k^2+\frac{R+\alpha\tau^2k^2}{2k}\left(\frac{\tau^2\alpha^2}{U_1^2}k^4+2\alpha^2k^2\right)\right)=$$

$$=-\frac{R^2\alpha}{6\tau}-\frac{2}{3}R^{3/2}\alpha^{3/2}k+\frac{1}{12}R\alpha^2\tau k^2-\frac{4}{3}R^{1/2}\alpha^{5/2}\tau^2k^3+\frac{4}{9}\alpha^3\tau^3k^4-\frac{1}{3}R^{-1/2}\alpha^{7/2}\tau^4k^5. \qquad (42)$$

Используя полученные соотношения (40), (41), (42), получаем

$$\int\limits_{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k}^{\frac{U_2}{\tau}-\alpha k+\frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} F_2(k,Q')dQ'=\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3}{6\tau^3k^2}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)+\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{6U_2}\alpha^2k-$$

$$-\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2\alpha}{2\tau}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)+\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{2U_1}\alpha k-\frac{R^2\alpha}{6\tau}-\frac{2}{3}R^{3/2}\alpha^{3/2}k+$$

$$+\frac{1}{12}R\alpha^2\tau k^2-\frac{4}{3}R^{1/2}\alpha^{5/2}\tau^2k^3+\frac{4}{9}\alpha^3\tau^3k^4-\frac{1}{3}R^{-1/2}\alpha^{7/2}\tau^4k^5.$$

Осталось просуммировать по k.

1. Обозначим $a=\frac{U_1}{\tau}$, тогда $a^2=\frac{R}{\alpha\tau^2}$. Следовательно,

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3}{6\tau^3k^2}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)=\frac{R^3}{6\tau^3}\sum_{k\leqslant a}\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)^3\log\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right).$$

Применяя лемму 23 (см. Приложение) и формулы

$$\int\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx=-\frac{\log(1+x^2)}{x}+2\arctan x,$$

$$\int\log(1+x^2)dx=x\log(1+x^2)-2x+2\arctan x,$$

$$\int x^2\log(1+x^2)dx=\frac{1}{3}\left(x^3\log(1+x^2)-\frac{2}{3}x^3+2x-2\arctan x\right),$$

$$\int x^4\log(1+x^2)dx=\frac{1}{5}\left(x^5\log(1+x^2)-\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3-2x+2\arctan x\right),$$

получаем

$$\sum_{k\leqslant a}\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)^3\log\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{16}{5}\log 2+\frac{8\pi}{5}-\frac{376}{75}\right)+O\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^3}{6\tau^3k^2}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{8}{15}\log 2+\frac{4\pi}{15}-\frac{188}{225}\right)+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

2. Применяя пункт (a) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{6U_2}\alpha^2k=\frac{R^2\alpha^2}{6U_2}\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)^2k=\frac{7}{36}\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

3. Аналогично первому пункту получаем

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2\alpha}{2\tau}\log\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)=\frac{R^2\alpha}{2\tau}\sum_{k\leqslant a}\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)^2\log\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{14}{15}\log 2+\frac{2\pi}{15}-\frac{164}{225}\right)+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

4. Применяя пункт (a) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{(R+\alpha\tau^2k^2)^2}{2U_1}\alpha k=\frac{R^2\alpha}{2U_1}\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(1+\frac{\alpha\tau^2}{R}k^2\right)^2k=\frac{7}{12}\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

5. Применяя пункт (a) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\left(-\frac{R^2\alpha}{6\tau}-\frac{2}{3}R^{3/2}\alpha^{3/2}k+\frac{1}{12}R\alpha^2\tau k^2-\frac{4}{3}R^{1/2}\alpha^{5/2}\tau^2k^3+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{9}\alpha^3\tau^3k^4-\frac{1}{3}R^{-1/2}\alpha^{7/2}\tau^4k^5\right)=-\frac{139}{180}\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau|Q'}}\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}}(Q'+Q+\alpha k)=\left(\frac{2\pi}{15}-\frac{2\log 2}{5}-\frac{91}{900}\right)\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}+O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

6.4 Случай 4

Lemma 10. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{41}=\left(\frac{11\pi}{120}-\frac{251}{60}\log 2+\frac{14}{5}\right)R^{5/2}\sqrt{\alpha}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+$$

$$+\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)+\frac{R^2\alpha}{\tau^2}\log\frac{U_2}{\tau}\right),$$

где Σ_{41} *определена в* (34).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по областям

$$\Omega_{41} = \left\{ U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q+Q'}, \quad U_1 < k \leqslant n \right\},$$

$$\Omega_{42} = \left\{ \frac{R}{Q+Q'} < n \leqslant \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}, \quad U_1 < k \leqslant \frac{R-nQ'}{Q} \right\},$$

$$\Omega_{43} = \left\{ U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leqslant \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}, \quad U_1 < k \leqslant n - \frac{Q}{\alpha} \right\}.$$

1. Вычисление первой суммы. Используя следствие 2(см. Приложение)

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}} (Q+Q'+\alpha k) = \sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}} \Bigg((Q+Q')(n-U_1) + \frac{\alpha}{2}(n^2-U_1^2) +$$

$$+O(Q+Q') + O(\alpha n)\Bigg) = \int_{U_1}^{\frac{R}{Q+Q'}} \left((Q+Q')(n-U_1) + \frac{\alpha}{2}(n^2-U_1^2)\right) dn +$$

$$+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right) + O(R) = \frac{Q+Q'}{2}\left(\frac{R}{Q+Q'} - U_1\right)^2 + \frac{\alpha}{6}\left(\frac{R^3}{(Q+Q')^3} - U_1^3\right) -$$

$$-\frac{\alpha U_1^2}{2}\left(\frac{R}{Q+Q'} - U_1\right) + O\left(\alpha\left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right)\right).$$

При вычислении асимптотики мы учли, что

$$Q + Q' \leqslant U_2 < \alpha n.$$

2. Вычисление второй суммы. Используя следствие 2(см. Приложение)

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}} (Q+Q'+\alpha k) = \sum_{\frac{R}{Q+Q'}<n\leqslant\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \Bigg((Q+Q')\left(\frac{R-nQ'}{Q} - U_1\right) +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2} - U_1^2\right) + O(Q+Q') + O\left(\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right)\Bigg) =$$

$$= \int\limits_{\frac{R}{Q+Q'}}^{\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left((Q+Q')\left(\frac{R-nQ'}{Q} - U_1\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2} - U_1^2\right)\right) +$$

$$+O(R) + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right) + O\left(\frac{Q^2}{\alpha}\right) + O\left(\frac{RQ}{Q+Q'}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}}(Q+Q'+\alpha k)\frac{(Q+Q')}{2QQ'}\left(\left(R-Q'\frac{R}{Q+Q'}\right)^2-\left(R-Q'\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}\right)^2\right)-U_1\frac{Q^2}{\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha}{6Q'Q^2}\left(\left(R-Q'\frac{R}{Q+Q'}\right)^3-\left(R-Q'\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}\right)^3\right)-U_1^2\frac{Q^2}{2(Q+Q')}+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right)=$$

$$=\frac{Q}{2Q'(Q+Q')}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)-U_1\frac{Q^2}{\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha Q}{6Q'(Q+Q')^3}\left(R^3-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right)-U_1^2\frac{Q^2}{2(Q+Q')}+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

3. Вычисление третьей суммы. Используя следствие 2(см. Приложение)

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}}(Q+Q'+\alpha k)=\sum_{U_1+\frac{Q}{\alpha}<n\leqslant\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}}\left((Q+Q')\left(n-\frac{Q}{\alpha}-U_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}\left(\left(n-\frac{Q}{\alpha}\right)^2-U_1^2\right)+O(Q+Q')+O\left(\alpha\left(n-\frac{Q}{\alpha}\right)\right)\right)=$$

$$=\int\limits_{U_1+\frac{Q}{\alpha}}^{\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}}\left((Q+Q')\left(n-\frac{Q}{\alpha}-U_1\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\left(n-\frac{Q}{\alpha}\right)^2-U_1^2\right)\right)+$$

$$+O(R)+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right)=\frac{Q+Q'}{2}\left(\frac{R-\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'}-U_1\right)^2+\frac{\alpha}{6}\left(\frac{\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3}{(Q+Q')^3}-U_1^3\right)-$$

$$-\frac{\alpha U_1^2}{2}\left(\frac{R-\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'}-U_1\right)+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}}-\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=\frac{Q+Q'}{2}\left(\frac{R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2}{(Q+Q')^2}-2U_1\frac{\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'}\right)+$$

$$+\frac{\alpha}{6}\frac{R^3-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3}{(Q+Q')^3}-\frac{\alpha U_1^2}{2}\frac{\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'}+\frac{Q}{2Q'(Q+Q')}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)-U_1\frac{Q^2}{\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha Q}{6Q'(Q+Q')^3}\left(R^3-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right)-U_1^2\frac{Q^2}{2(Q+Q')}+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2Q'}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\alpha}{6Q'(Q+Q')^2}\left(R^3-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right)-\frac{U_1}{\alpha}Q(Q+Q')-\frac{U_1^2}{2}Q+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(Q,Q')\in\Omega_4=\left\{Q\leqslant U_2\quad Q'\leqslant U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}\right\},\quad \tau\mid Q,\quad \tau\mid Q'.$$

1. Суммируем первое слагаемое.

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\frac{1}{2Q'}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)=\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}}\left(\frac{R\tau}{\alpha}Q-\frac{\tau^3}{2\alpha^2}Q^2Q'\right)=$$

$$=\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\left(\frac{RU_2}{\alpha}Q\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}-\frac{U_2^2\tau}{4\alpha^2}Q^2\frac{(U_2-\tau Q)^2}{(U_2+\tau Q)^2}+O\left(\frac{R\tau}{\alpha}Q\right)\right).$$

Применяя пункты (c),(d) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\frac{1}{2Q'}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\log 2-\frac{7}{12}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

2. Суммируем второе слагаемое.

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\frac{\alpha}{6Q'(Q+Q')^2}\left(R^3-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right)=$$

$$=\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}}\frac{1}{(Q+Q')^2}\left(\frac{R^2}{2\tau}Q-\frac{R\tau}{2\alpha}Q^2Q'+\frac{\tau^3}{6\alpha^2}Q^3Q'^2\right).$$

Для упрощения записи в следующих формулах $a=\frac{U_2}{\tau}$.

(a) Для первого слагаемого получаем.

$$\sum_{Q'\leqslant a\frac{a-Q}{a+Q}}\frac{1}{(Q+Q')^2}=\frac{a(a-Q)}{Q(Q^2+a^2)}+O\left(\frac{1}{Q^2}\right).$$

Используя пункт (e) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}}\frac{R^2}{2\tau}\frac{Q}{(Q+Q')^2}=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\log 2}{4}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

(b) Для второго слагаемого получаем.

$$\sum_{Q'\leqslant a\frac{a-Q}{a+Q}}\frac{Q'}{(Q+Q')^2}=\log\left(1+\frac{a}{Q}\frac{a-Q}{a+Q}\right)-\frac{a(a-Q)}{(Q^2+a^2)}+O\left(\frac{1}{Q}\right).$$

Используя пункты (f), (g) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}}\frac{R\tau}{2\alpha}\frac{Q^2Q'}{(Q+Q')^2}=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{\pi}{24}-\frac{5\log 2}{12}+\frac{1}{6}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

(c) Для третьего слагаемого получаем.

$$\sum_{Q'\leqslant a\frac{a-Q}{a+Q}} \frac{Q'^2}{(Q+Q')^2} = a\frac{a-Q}{a+Q} - 2Q\log\left(1+\frac{a}{Q}\frac{a-Q}{a+Q}\right) + Q\frac{a(a-Q)}{(Q^2+a^2)} + O(1).$$

Используя пункты (h), (i), (j) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}} \frac{\tau^3}{6\alpha^2}\frac{Q^3Q'^2}{(Q+Q')^2} = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{\pi}{120} - \frac{7\log 2}{20} + \frac{13}{60}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}} \frac{\alpha}{6Q'(Q+Q')^2}\left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{11\pi}{120} - \frac{11\log 2}{60} + \frac{1}{20}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

3. Суммируем третье слагаемое.

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}} \frac{U_1}{\alpha}Q(Q+Q') = \sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}} \frac{U_1\tau^2}{\alpha}Q(Q+Q').$$

(a) Для первого слагаемого получаем.

$$\sum_{Q'\leqslant a\frac{a-Q}{a+Q}} Q^2 = aQ^2\frac{a-Q}{a+Q} + O(Q^2).$$

Используя пункт (k) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}} \frac{U_1\tau^2}{\alpha}Q^2 = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

(b) Для второго слагаемого получаем.

$$\sum_{Q'\leqslant a\frac{a-Q}{a+Q}} QQ' = \frac{a^2}{2}Q\frac{(a-Q)^2}{(a+Q)^2} + O\left(aQ\frac{a-Q}{a+Q}\right).$$

Используя пункты (c), (l), следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}} \frac{U_1\tau^2}{\alpha}QQ' = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(4\log 2 - \frac{11}{4}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}} \frac{U_1}{\alpha}Q(Q+Q') = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(6\log 2 - \frac{49}{12}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

4. Суммируем четвертое слагаемое. Используя пункт (c), следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}} \frac{U_1^2}{2}Q = \sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{\tau}}\ \sum_{Q'\leqslant\frac{U_2}{\tau}\frac{U_2-\tau Q}{U_2+\tau Q}} \frac{U_1^2}{2}\tau Q = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{3}{4}-\log 2\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_4\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}}-\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$
$$=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{11}{120}\pi-\frac{251}{60}\log 2+\frac{14}{5}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right)+O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau^2}\log\frac{U_2}{\tau}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

6.5 Случай 5

Lemma 11. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{51}=\left(\frac{\pi}{24}+\frac{55}{12}\log 2-\frac{119}{36}\right)R^{5/2}\sqrt{\alpha}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)+\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right),$$

где Σ_{51} *определена в* (35).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по областям

$$\Omega_{51}=\left\{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'},\quad U_1<k\leqslant n\right\},$$

$$\Omega_{52}=\left\{\frac{R}{Q+Q'}<n\leqslant\frac{R-U_1Q}{Q'},\quad U_1<k\leqslant\frac{R-nQ'}{Q}\right\}.$$

1. Вычисление первой суммы аналогично первому случаю в лемме 10

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}}(Q+Q'+\alpha k)=\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\Bigg((Q+Q')(n-U_1)+\frac{\alpha}{2}(n^2-U_1^2)+$$
$$+O(Q+Q'+\alpha n)\Bigg)=\frac{Q+Q'}{2}\left(\frac{R}{Q+Q'}-U_1\right)^2+\frac{\alpha}{6}\left(\frac{R^3}{(Q+Q')^3}-U_1^3\right)-$$
$$-\frac{\alpha U_1^2}{2}\left(\frac{R}{Q+Q'}-U_1\right)+O\left(\alpha\left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right)\right).$$

При вычислении асимптотики мы учли, что

$$Q+Q'\leqslant U_2<\alpha n.$$

2. Вычисление второй суммы. Используя следствие 2(см. Приложение)

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}(Q+Q'+\alpha k)=\sum_{\frac{R}{Q+Q'}<n\leqslant\frac{R-U_1Q}{Q'}}\left((Q+Q')\left(\frac{R-nQ'}{Q}-U_1\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2}-U_1^2\right)+O(Q+Q')+O\left(\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right)\right)=$$
$$=\int\limits_{\frac{R}{Q+Q'}}^{\frac{R-U_1Q}{Q'}}\left((Q+Q')\left(\frac{R-nQ'}{Q}-U_1\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2}-U_1^2\right)\right)+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right)+$$
$$+O(R)+O\left((Q+Q')\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}-\frac{R}{Q+Q'}\right)\right)+O\left(\frac{\alpha}{2}\frac{Q}{Q'}\left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2}-U_1^2\right)\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}(Q+Q'+\alpha k)=(Q+Q')\frac{Q}{2Q'}\left(\frac{R}{Q+Q'}-U_1\right)^2+\frac{\alpha}{6}\frac{Q}{Q'}\left(\frac{R^3}{(Q+Q')^3}-U_1^3\right)-$$
$$-\frac{\alpha}{2}U_1^2\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}-\frac{R}{Q+Q'}\right)+O\left((Q+Q')\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}-\frac{R}{Q+Q'}\right)\right)+$$
$$+O\left(\frac{\alpha}{2}\frac{Q}{Q'}\left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2}-U_1^2\right)\right).$$

Используя $(Q,Q')\in\Omega_5$, легко получить

$$Q'>U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}=\frac{R-U_1Q}{U_1+Q/\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{R-U_1Q}{Q'}<\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}. \tag{43}$$

Поэтому

$$O\left((Q+Q')\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}-\frac{R}{Q+Q'}\right)\right)<O\left(\frac{Q^2}{\alpha}\right)<O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right),$$

Из неравенства (43) следует

$$R-\frac{QQ'}{\alpha}<U_1(Q+Q'). \tag{44}$$

Поэтому

$$O\left(\frac{\alpha}{2}\frac{Q}{Q'}\left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2}-U_1^2\right)\right)<O\left(\frac{Q\alpha}{2Q'(Q+Q')^2}\left(R^2-\left(R-\frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)\right)<$$
$$<O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=\frac{1}{2Q'}(Q+Q')^2\left(\frac{R}{Q+Q'}-U_1\right)^2+$$
$$+\frac{\alpha}{6}\frac{Q+Q'}{Q'}\left(\frac{R^3}{(Q+Q')^3}-U_1^3\right)-\frac{\alpha}{2}U_1^2\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}-U_1\right)+O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(Q,Q')\in\Omega_5=\left\{Q\leqslant U_2\quad U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}<Q'\leqslant U_2-Q\right\},\quad \tau\mid Q,\quad \tau\mid Q'.$$

Для упрощения записи в формулах часто используется обозначение $a=\frac{U_2}{\tau}$. Определим функцию $G(Q,Q')$

$$G(Q,Q')=\left(-\frac{2}{3}RU_1Q+\frac{U_1^2\tau}{2}Q^2\right)\frac{1}{Q'}+$$
$$+\frac{\alpha R^3}{6\tau^3Q'(Q+Q')^2}+\left(U_1^2\tau Q-\frac{2}{3}RU_1\right)+\frac{U_1^2\tau}{2}Q'.$$

Используя соотношение

$$\frac{1}{2Q'}(Q+Q')^2\left(\frac{R}{Q+Q'}-U_1\right)^2=\left(\frac{R^2}{2}-RU_1Q+\frac{U_1^2}{2}Q^2\right)\frac{1}{Q'}-RU_1+U_1^2Q+\frac{U_1^2}{2}Q',$$

после тривиальных преобразований легко получить

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$
$$=\sum_{Q\leqslant a}\sum_{a\frac{a-Q}{a+Q}<Q'\leqslant a-Q}\left(G(Q,Q')+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2(Q+Q')^2}\right)\right).$$

Заметим

$$2(\sqrt{2}-1)U_2<Q+Q'\leqslant U_2,$$

по-этому, используя те же рассуждения, что и в случаи 3, получаем

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$
$$=\sum_{Q\leqslant a}\left(\int\limits_{a\frac{a-Q}{a+Q}}^{a-Q}G(Q,Q')dQ'+G\left(Q,a\frac{a-Q}{a+Q}\right)\right)+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right).$$

Используя следующие оценки

$$\sum_{Q\leqslant a} Q\frac{a+Q}{a-Q} = O(a^2\log a), \quad \sum_{Q\leqslant a} Q^2\frac{a+Q}{a-Q} = O(a^3\log a),$$
$$\sum_{Q\leqslant a} \frac{(a+Q)^3}{(a-Q)(a^2+Q^2)^2} = O\left(\frac{\log a}{a}\right),$$

легко получить

$$\sum_{Q\leqslant a} G\left(Q, a\frac{a-Q}{a+Q}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5\\ \tau|Q,\tau|Q'}} \left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} + \sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}\right)(Q'+Q+\alpha k) =$$
$$= \sum_{Q\leqslant a}\left(\left(-\frac{2}{3}RU_1Q + \frac{U_1^2\tau}{2}Q^2\right)\log\left(1+\frac{Q}{a}\right) + \frac{\alpha R^3}{6\tau^3}\left(\frac{1}{Q^2}\log\left(1+\frac{Q^2}{a^2}\right) - \frac{1}{a}\frac{a-Q}{a^2+Q^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(U_1^2\tau Q - \frac{2}{3}RU_1\right)Q\frac{a-Q}{a+Q} + \frac{U_1^2\tau}{4}(a-Q)^2\frac{(a+Q)^2-a^2}{(a+Q)^2}\right) +$$
$$+ O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

1. Суммируем первое слагаемое. Используя пункты (m), (n), следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant a}\left(-\frac{2}{3}RU_1Q + \frac{U_1^2\tau}{2}Q^2\right)\log\left(1+\frac{Q}{a}\right) = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{1}{3}\log 2 - \frac{11}{36}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

2. Суммируем второе слагаемое.Используя пункты (o), (e) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant a}\frac{\alpha R^3}{6\tau^3}\left(\frac{1}{Q^2}\log\left(1+\frac{Q^2}{a^2}\right) - \frac{1}{a}\frac{a-Q}{a^2+Q^2}\right) = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{12}\log 2\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

3. Суммируем третье слагаемое. Используя пункты (c), (k) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant a}\left(U_1^2\tau Q - \frac{2}{3}RU_1\right)Q\frac{a-Q}{a+Q} = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{10}{3}\log 2 - \frac{7}{3}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

4. Суммируем четвертое слагаемое. Используя пункты (p) следствия 3 (см. Приложение), получаем

$$\sum_{Q\leqslant a}\frac{U_1^2\tau}{4}(a-Q)^2\frac{(a+Q)^2-a^2}{(a+Q)^2} = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\log 2 - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5\\ \tau|Q,\tau|Q'}}\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}}\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2}\left(\frac{\pi}{24}+\frac{55}{12}\log 2-\frac{119}{36}\right)+O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right)+O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

7 Вычисление сумм второго типа

В этом параграфе мы вычислим $\Sigma_{12}, \Sigma_{22}, \Sigma_{32}, \Sigma_{42}, \Sigma_{52}$.

7.1 Случай 1

Lemma 12. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{12}=\sum_{\tau|\delta}\sum_{z=1}^{\tau}{}^{*}\sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1\\ \tau|n,\tau\nmid k}}\sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\tau}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\log\tau\right)\right),$$

где Σ_{12} *определена в* (31).

Доказательство. Суммирование по Q' было проведено в лемме 7. Используя лемму 4 и следствие 1 получаем

$$\sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\tau}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\tau}\|}\left(\left|\frac{k^2}{2n^2}-\frac{k}{n}\right|\alpha^2n^2+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{R}{n}-\frac{\alpha k^2}{n}-R\frac{k}{n^2}\right|\alpha n+\left|\alpha R\frac{k}{n}+\frac{R^2}{2n^2}\right|\right)+$$

$$+\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n}O\left(Q+\alpha k\right)+\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n}O\left(\frac{R-kQ}{n}\right).$$

Применяя оценки из лемме 7, получаем

$$\sum_{(Q,Q')\in\Omega_{11}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\tau}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\tau}\|}\left(\alpha^2kn+R\alpha+\frac{R^2}{n^2}\right)+O\left(R\alpha\right)\ll$$

$$\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\tau}\|}\frac{R^2}{n^2}+O\left(R\alpha\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по переменным

$$(n,k)\in\Omega_1,\tau|n,\tau\nmid k,$$

используя лемму 5

$$\sum_{\substack{(n,k)\in\Omega_1\\ \tau|n,\tau\nmid k}}\left(\frac{1}{\|\frac{zk}{\tau}\|}\frac{R^2}{n^2}+O\left(R\alpha\right)\right)\ll\sum_{n\leqslant\frac{U_1}{\tau}}\frac{R^2}{\tau^2n^2}\tau(n+1)\log\tau+O\left(\frac{R^2}{\tau}\right)=$$

$$=O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\log\tau\right)\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

7.2 Случай 2

Lemma 13. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{22}=\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\right)+\frac{R^2\alpha}{\tau}\log\tau+R^{3/2}\sqrt{\alpha}\log\tau\right),$$

где Σ_{22} определена в (32).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по областям Ω_{21} и Ω_{22}.

1. Используя вычисления произведенные в лемме 8 в соответствующем пункте, а так же лемму 4 и следствие 1 получаем

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q'+\alpha k}}\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)\left(\alpha^2nk+\alpha^2\frac{k^2}{2}+\alpha kQ'+O\left(\alpha n\right)+O\left(Q'+\alpha k\right)\right)\ll$$

$$\ll\frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\left(\frac{R\alpha^2k}{Q'+\alpha k}+\alpha kQ'+\frac{\alpha^2k^2}{2}\right)+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right)\ll$$

$$\ll\frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R\alpha^2k}{Q'+\alpha k}+O\left(\alpha\frac{R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right).$$

2. Используя вычисления произведенные в лемме 8 в соответствующем пункте, а так же лемму 4 и следствие 1 получаем

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k)=$$

$$=\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q'+\alpha k}}\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)f(n)+O\left(\frac{R\alpha^2k^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right),$$

   где функция $f(n)$ определена в лемме 8.

   Применим следствие 1 с учетом того, что

$$f\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\right)=0.$$

Заметим, что удобнее использовать следующее преобразование

$$f\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}\right) = f\left(\frac{R}{Q'+\alpha k}\right) - f\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\right) = \frac{R\alpha^2 k}{Q'+\alpha k} + Q'\alpha k + \frac{\alpha^2 k^2}{2}.$$

Тогда легко получить следующую оценку

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\left(\frac{R\alpha^2 k}{Q'+\alpha k} + Q'\alpha k + \frac{\alpha^2 k^2}{2}\right) + O\left(\frac{R\alpha^2 k^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}} + \sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R\alpha^2 k}{Q'+\alpha k} + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_2 = \{k \leqslant U_1 \quad Q' \leqslant U_2 - \alpha k\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \nmid Q'.$$

1. Применяя лемму 3 и лемму 4, получаем

$$\sum_{\substack{Q'\leqslant U_2-\alpha k\\ \tau\nmid Q'}} \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{1}{Q'+\alpha k} \ll \left(\frac{U_2-\alpha k}{U_2} + \log\frac{U_2}{\alpha k} + \frac{\tau}{\alpha k}\right)\log\tau.$$

   Далее, используя следствия 3, получаем

$$\sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \tau\mid k}} R\alpha^2 k\left(\frac{U_1-k}{U_1} + \log\frac{U_1}{k} + \frac{\tau}{\alpha k}\right)\log\tau \ll$$
$$\ll \frac{R^2\alpha}{\tau}\log\tau + \frac{R^2\alpha}{\tau}\log\tau + R^{3/2}\sqrt{\alpha}\log\tau.$$

2. Применяя лемму 23, получаем

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_2\\ \tau\mid k,\tau\nmid Q'}} O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q'+\alpha k)^2}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau}\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}\right)\right).$$

Тем самым лемма доказана. ∎

7.3 Случай 3

Lemma 14. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{32} = \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} + \frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\log\tau\right),$$

где Σ_{32} *определена в* (33).

Доказательство. Используя вычисления произведенные в лемме 9, получаем

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right)(Q'+Q+\alpha k) =$$

$$= \sum_{U_1 < n \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) f(n) + O\left(\frac{R^2}{k(Q'+\alpha k)}\right),$$

где функция $f(n)$ определена в лемме 8.

Применим следствие 1 с учетом того, что

$$f\left(\frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}\right) = 0,$$

$$f(U_1) = Q'^2\left(\frac{U_1^2}{2k^2} - \frac{U_1}{k}\right) - Q'\left(U_1\alpha + \frac{R+\alpha k^2}{k^2}U_1 - \frac{R+\alpha k^2}{k}\right) + \frac{(R+\alpha k^2)^2}{k^2} - \frac{U_1^2\alpha^2}{2},$$

получаем

$$\sum_{U_1 < n \leqslant \frac{R+\alpha k^2}{Q'+\alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) f(n) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|} f(U_1) \ll$$

$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\left(Q'^2\frac{U_1^2}{k^2} + Q'\frac{R+\alpha k^2}{k^2}U_1 + \frac{R^2}{k^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_3 = \left\{k \leqslant U_1, \quad U_2 - \alpha k < Q' \leqslant U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}\right\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \nmid Q'.$$

Оценим каждое слагаемое, используя лемму5.

1. Суммируем первое слагаемое.

$$\sum_{\substack{U_2-\alpha k < Q' \leqslant U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1} \\ \tau\nmid Q'}} \frac{Q'^2}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{U_1^2}{k^2} \ll \frac{U_1^2}{k^2}\left(U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}\right)^2\left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau\right)\log\tau \ll$$

$$\ll \frac{U_1^4\alpha^2}{k^2}\left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau\right)\log\tau \ll$$

$$\left(U_1^3\alpha^2 + \frac{U_1^4\alpha^2\tau}{k^2}\right)\log\tau.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau\nmid Q'}} \frac{Q'^2}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{U_1^2}{k^2} \ll \frac{R^2}{\tau}\log\tau.$$

2. Суммируем второе слагаемое.

$$\sum_{\substack{U_2-\alpha k<Q'\leqslant U_2-\alpha k+\frac{\alpha k^2}{U_1}\\ \tau\nmid Q'}} \frac{Q'}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R+\alpha k^2}{k^2}U_1 \ll \frac{R+\alpha k^2}{k^2}U_1^2\alpha\left(\frac{\alpha k^2}{U_1}+\tau\right)\log\tau \ll$$

$$\ll \left(RU_1\alpha^2+\frac{R^2}{k^2}\tau\right)\log\tau.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau\nmid Q'}} \frac{Q'}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R+\alpha k^2}{k^2}U_1 \ll \frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\log\tau.$$

3. Суммируем третье слагаемое.

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau\nmid Q'}} \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2}{k^2} \ll \sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \tau|k}} \frac{R^2}{k^2}\left(\frac{\alpha k^2}{U_1}+\tau\right)\log\tau \ll$$

$$\ll \frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\log\tau.$$

4. Суммируем асимптотическое слагаемое.

$$\sum_{\substack{(k,Q')\in\Omega_3\\ \tau|k,\tau\nmid Q'}} O\left(\frac{R^2}{k(Q'+\alpha k)}\right) = \sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \tau|k}} O\left(\frac{R^2}{k}\log\left(1+\frac{k^2}{U_1^2}\right)\right) \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \tau|k}} O\left(\frac{R^2 k}{U_1^2}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

7.4 Случай 4

Lemma 15. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{42} = \sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}(1+\log\tau)\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right),$$

где Σ_{42} *определена в* (34).

Доказательство. Вычислим каждую из трех внутренних сумм.

1. Вычисление первой суммы.Определим функцию

$$g_1(n) = \frac{\alpha}{2}n^2 + (Q+Q')n - U_1(Q+Q') - \frac{\alpha}{2}U_1^2,$$

тогда

$$\sum_{U_1<k\leqslant n} (Q+Q'+\alpha k) = g_1(n) + O(Q+Q') + O(\alpha n).$$

Заметим, что $g_1(n)$ возрастает на промежутке $U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q+Q'}$. Очевидно, что

$$g_1(U_1) = 0, \quad g_1\left(\frac{R}{Q+Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Применим следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}} \exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

2. Вычисление второй суммы.

$$\sum_{U_1<k\leqslant\frac{R-nQ'}{Q}} (Q+Q'+\alpha k) = (Q+Q')\left(\frac{R-nQ'}{Q} - U_1\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2} - U_1^2\right) +$$

$$+O(Q+Q') + Q\left(\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right) = \frac{\alpha Q'^2}{2Q^2}n^2 - \left(Q+Q'+\frac{R\alpha}{Q}\right)\frac{Q'}{Q}n + (Q+Q')\left(\frac{R}{Q} - U_1\right) +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{R^2}{Q^2} - U_1^2\right) + O(Q+Q') + O\left(\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right) = g_2(n) + O(Q+Q') + O\left(\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right).$$

Заметим, что $g_2(n)$ убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q+Q'} < n \leqslant \frac{R+\frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}.$$

Действительно,

$$g_2(n)' = \frac{\alpha Q'^2}{Q^2}n - \left(Q+Q'+\frac{R\alpha}{Q}\right)\frac{Q'}{Q} = \frac{\alpha Q'}{Q^2}(nQ'-R) - \frac{Q'}{Q}(Q+Q') < 0.$$

Мы воспользовались тем, что $nQ' \leqslant R$ (см. (27)). Очевидно, что

$$g_2\left(\frac{R}{Q+Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Применим следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}} \exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

3. Вычисление третьей суммы.

$$\sum_{U_1<k\leqslant n-\frac{Q}{\alpha}}(Q+Q'+\alpha k)=\frac{\alpha}{2}n^2+nQ'-(Q+Q')\left(\frac{Q}{\alpha}+U_1\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{Q^2}{\alpha^2}-U_1^2\right)+O(Q+Q')+O(\alpha n-Q)=g_3(n)+O(Q+Q')+O(\alpha n-Q).$$

Заметим, что $g_3(n)$ возрастает на промежутке $U_1+\frac{Q}{\alpha}<\frac{R+\frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}$. Очевидно, что

$$g_3\left(U_1+\frac{Q}{\alpha}\right)=0,\quad g_3\left(\frac{R+\frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}\right)\ll\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Применим следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}}\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}}+\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}}-\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}}\right)\exp\left(2\pi i\frac{zQ'}{\tau}n\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll$$
$$\ll\frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}+O\left(\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}\right)+O\left(R\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(Q,Q')\in\Omega_4=\left\{Q\leqslant U_2\quad Q'\leqslant U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}\right\},\quad \tau\mid Q,\quad \tau\nmid Q'.$$

Увеличим область суммирования по Q' до

$$Q'\leqslant U_2-Q.$$

Используя лемму 3 и лемму 5, получаем

$$\sum_{\substack{Q'\leqslant U_2-Q\\ \tau\nmid Q'}}\frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}\ll R^2\alpha\left(\frac{U_2-Q}{U_2^2}+\frac{(U_2-Q)^2}{QU_2^2}+\frac{\tau}{Q^2}\right)\log\tau.$$

Легко получить

$$R^2\alpha\sum_{\substack{Q\leqslant U_2\\ \tau\mid Q'}}\left(\frac{U_2-Q}{U_2^2}+\frac{(U_2-Q)^2}{QU_2^2}+\frac{\tau}{Q^2}\right)\log\tau=O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\log\tau\right).$$

Осталось просуммировать асимптотические слагаемые.

$$\sum_{\substack{Q\leqslant U_2,Q'\leqslant U_2-Q\\ \tau\mid Q'}}\left(O\left(\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}\right)+O\left(R\right)\right)=O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\left(1+\log\frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

7.5 Случай 5

Lemma 16. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{52} = \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right),$$

где Σ_{52} *определена в* (35).

Доказательство. Вычислим каждую из трех внутренних сумм.

1. Заметим, что первая сумма совпадает с первой суммой леммы 15. Так как в лемме 15 мы увеличивали область суммирования по Q' до

$$Q' \leqslant U_2 - Q,$$

то тем самым мы уже все сосчитали.

2. Вычисление второй суммы.

$$\sum_{U_1 < k \leqslant \frac{R-nQ'}{Q}} (Q + Q' + \alpha k) = (Q + Q')\left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2} - U_1^2\right) +$$

$$+O(Q + Q') + Q\left(\alpha\frac{R - nQ'}{Q}\right) = g_2(n) + O(Q + Q') + Q\left(\alpha\frac{R - nQ'}{Q}\right).$$

Заметим, что $g_2(n)$ убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q + Q'} < n \leqslant \frac{R - U_1 Q}{Q'}$$

и

$$g_2\left(\frac{R}{Q + Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Применим следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right)(Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Мы получили ту же оценку что и в лемме 15, а так как в лемме 15 мы увеличивали область суммирования по Q' до

$$Q' \leqslant U_2 - Q,$$

то тем самым мы уже сосчитали суммы, не входящие в асимптотические слагаемые. Суммируем асимптотические слагаемые по n

$$\sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leqslant \frac{R - U_1 Q}{Q'}} \left(O(Q + Q') + O\left(\alpha\frac{R - nQ'}{Q}\right)\right) \ll O\left(R\frac{Q}{Q'}\right) + O\left(\alpha\frac{R^2 Q}{Q'(Q + Q')^2}\right).$$

Полученное выражение необходимо просуммировать по

$$(Q, Q') \in \Omega_5 = \left\{ Q \leqslant U_2, \quad U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q' \leqslant U_2 - Q \right\}, \quad \tau \mid Q, \quad \tau \nmid Q'.$$

1. Суммируем первое слагаемое.

$$\sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leqslant U_2 - Q} O\left(R\frac{Q}{Q'}\right) = O\left(RQ\log\left(1 + \frac{Q}{U_2}\right)\right) \ll O\left(R\frac{Q^2}{U_2}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5 \\ \tau\mid Q, \tau\nmid Q'}} O\left(R\frac{Q}{Q'}\right) \ll O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

2. Суммируем второе слагаемое.

$$\sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leqslant U_2 - Q} \frac{1}{Q'(Q+Q')^2} \ll \int\limits_{\frac{Q^2+U_2^2}{Q+U_2}}^{U_2} \frac{1}{(x-Q)x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{Q^2+U_2^2}{Q+U_2}}^{U_2} \left(-\frac{1}{Q^2 x} - \frac{1}{Qx^2} + \frac{1}{Q^2(x-Q)}\right) dx = \frac{1}{Q^2}\log\left(1 + \frac{Q^2}{U_2^2}\right) - \frac{U_2 - Q}{U_2(U_2^2 + Q^2)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leqslant U_2 - Q} O\left(\alpha\frac{R^2 Q}{Q'(Q+Q')^2}\right) \ll O\left(\alpha\frac{R^2 Q}{U_2^2}\right) + O\left(\alpha R^2 \frac{U_2 - Q}{U_2^2 + Q^2}\right).$$

Используя пункт (e) следствия 3, получаем

$$\sum_{\substack{(Q,Q')\in\Omega_5 \\ \tau\mid Q, \tau\nmid Q'}} O\left(\alpha\frac{R^2 Q}{Q'(Q+Q')^2}\right) \ll O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

8 Вычисление сумм третьего типа

В этом параграфе мы вычислим $\Sigma_{13}, \Sigma_{23}, \Sigma_{33}, \Sigma_{43}, \Sigma_{53}$.

8.1 Случай 1

Lemma 17. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{13} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d\right),$$

где Σ_{13} *определена в* (31).

Доказательство. Оценим внутреннюю сумму, используя следствие 1, получаем

$$\sum_{Q' \leqslant \frac{R-kQ}{n}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\tau} Q'\right)(Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|}\left(\frac{R-kQ}{n} + Q + \alpha k\right) \ll \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|}\frac{R}{n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{(Q,Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\tau} Q'\right)(Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{R}{n} \alpha k \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|}.$$

и

$$\sum_{k \leqslant n} \frac{R}{n} \alpha k \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|} \ll R\alpha \frac{n}{\|\frac{zn}{\delta}\|}.$$

Отсюда получаем

$$\Sigma_{13} \ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leqslant U_1 \\ \delta \nmid zn}} R\alpha \frac{n}{\|\frac{zn}{\delta}\|} = \sum_{n \leqslant U_1} R\alpha n \sum_{\substack{z \leqslant \delta \\ \delta \nmid zn}} \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|} = \sum_{d|\delta} \sum_{\substack{n \leqslant U_1/d \\ (n,\delta/d)=1}} R\alpha n d \sum_{\substack{z \leqslant \delta \\ \frac{\delta}{d} \nmid zn}} \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta/d}\|}.$$

Так как

$$\sum_{\substack{z \leqslant \delta \\ \frac{\delta}{d} \nmid zn}} \frac{1}{\|\frac{zn}{\delta/d}\|} \ll \delta \log \frac{\delta}{d},$$

то получаем

$$\Sigma_{13} \ll \sum_{d|\delta} d\delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{n \leqslant \frac{U_1}{d}} R\alpha n \ll R^2 \sum_{d|\delta} d \log d.$$

Тем самым лемма доказана. □

8.2 Случай 2

Lemma 18. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{23} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d \left(1 + \log \frac{U_1}{\delta/d}\right)\right),$$

где Σ_{23} *определена в* (32).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по областям Ω_{21} и Ω_{22}.

1. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\alpha n}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}(Q'+\alpha n+\alpha n)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}\alpha n.$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{R^2\alpha}{(Q'+\alpha k)^2}\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant U_2-\alpha k}\sum_{(n,Q)\in\Omega_{21}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{R^2}{k}\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

2. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\frac{R-nQ'}{k}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}\left(\frac{R-nQ'}{k}+Q'+\alpha n\right)\ll\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}\frac{R}{k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll\frac{R\alpha k}{Q'+\alpha k}\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant U_2-\alpha k}\sum_{(n,Q)\in\Omega_{22}}\exp\left(2\pi i\frac{zk}{\delta}Q\right)(Q'+Q+\alpha k)\ll R\alpha k\log\frac{U_1}{k}\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{23}\ll\sum_{z=1}^{\delta}\sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \delta\nmid zk}}\left(\frac{R^2}{k}+R\alpha k\log\frac{U_1}{k}\right)\frac{1}{\|\frac{zn}{\delta}\|}\ll\sum_{d|\delta}\delta\log\frac{\delta}{d}\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{d}}\left(\frac{R^2}{dk}+R\alpha dk\log\frac{U_1}{dk}\right).$$

Используя пункт (b), следствия 3, получаем

$$\Sigma_{23}\ll\sum_{d|\delta}\delta\log\frac{\delta}{d}\left(\frac{R^2}{d}\log\frac{U_1}{d}+\frac{R^2}{d}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

8.3 Случай 3

Lemma 19. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{33} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d\right),$$

где Σ_{33} *определена в* (33).

Доказательство. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{\alpha(n-k)<Q\leqslant\frac{R-nQ'}{k}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}\left(\frac{R-nQ'}{k}+Q'+\alpha k\right) \ll \frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}\frac{R}{k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{R(R+\alpha k^2)}{k(Q'+\alpha k)}\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{U_2-\alpha k<Q'\leqslant U_2-\alpha k+\frac{\alpha k^2}{U_1}} \sum_{(n,Q)\in\Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll$$
$$\ll \frac{R}{k}(R+\alpha k^2)\log\left(1+\frac{k^2}{U_1^2}\right)\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|} \ll \frac{R^2}{k}\log\left(1+\frac{k^2}{U_1^2}\right)\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{33} \ll \sum_{z=1}^{\delta}\sum_{\substack{k\leqslant U_1\\ \delta\nmid zk}} \frac{R^2}{k}\log\left(1+\frac{k^2}{U_1^2}\right)\frac{1}{\|\frac{zk}{\delta}\|} \ll \sum_{d|\delta}\delta\log\frac{\delta}{d}\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{d}}\frac{R^2}{dk}\log\left(1+\frac{d^2k^2}{U_1^2}\right) \ll$$
$$\ll \sum_{d|\delta}\delta\log\frac{\delta}{d}\sum_{k\leqslant\frac{U_1}{d}}\frac{R^2}{U_1^2}dk \ll R^2\sum_{d|\delta} d\log d.$$

Тем самым лемма доказана. □

8.4 Случай 4

Lemma 20. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{43} = O\left(R^2\alpha \sum_{d|\delta} d\log d\left(1+\log\frac{U_2}{\delta/d}\right)\right),$$

где Σ_{43} *определена в* (34).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по трем областям.

1. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{41}} \exp\left(2\pi i\frac{zQ}{\delta}k\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}(Q'+Q+\alpha n) \ll$$

$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\sum_{U_1<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\alpha n \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}} \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{R^2\alpha}{Q}.$$

2. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{42}} \exp\left(2\pi i\frac{zQ}{\delta}k\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\sum_{\frac{R}{Q+Q'}<n\leqslant\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}}\left(Q'+Q+\alpha\frac{R-nQ'}{Q}\right) \ll$$

$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\sum_{\frac{R}{Q+Q'}<n\leqslant\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}}\frac{R\alpha}{Q} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{RQ}{Q+Q'}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}} \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{RQ}{Q+Q'} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}RQ\log\left(\frac{U_2^2+Q^2}{Q(U_2+Q)}\right).$$

3. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{43}} \exp\left(2\pi i\frac{zQ}{\delta}k\right)(Q'+Q+\alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\sum_{U_1+\frac{Q}{\alpha}<n\leqslant\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}}\alpha n \ll$$

$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\alpha\frac{(R+Q^2/\alpha)^2}{(Q+Q')^2}.$$

Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{Q'\leqslant U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q}} \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\alpha\frac{(R+Q^2/\alpha)^2}{(Q+Q')^2} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\alpha\frac{(R+Q^2/\alpha)^2}{Q} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\frac{R^2\alpha}{Q}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{43} \ll \sum_{z=1}^{\delta}\sum_{\substack{Q\leqslant U_2\\ \delta\nmid zQ}}\frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|}\left(\frac{R^2\alpha}{Q}+RQ\log\left(\frac{U_2^2+Q^2}{Q(U_2+Q)}\right)+\frac{R^2\alpha}{Q}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{d|\delta}\delta\log\frac{\delta}{d}\sum_{Q\leqslant\frac{U_2}{d}}\left(\frac{R^2\alpha}{dQ}+RdQ\log\left(\frac{U_2^2+d^2Q^2}{dQ(U_2+dQ)}\right)\right).$$

Используя пункт (г), следствия 3, получаем

$$\Sigma_{43} \ll \sum_{d|\delta} \frac{\delta}{d} \log\frac{\delta}{d} \left(R^2 \alpha \log \frac{U_2}{d} + R^2\alpha \right).$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

8.5 Случай 5

Lemma 21. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\Sigma_{53} = O\left(R^2\alpha \sum_{d|\delta} d \log d \right),$$

где Σ_{53} *определена в* (35).

Доказательство. Вычислим отдельно суммы по двум областям.

1. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{51}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right)(Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \sum_{U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q+Q'}} (Q' + Q + \alpha n) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \sum_{U_1 < n \leqslant \frac{R}{Q+Q'}} \alpha n \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

   Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leqslant U_2 - Q} \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} R^2\alpha \frac{U_2 + Q}{U_2^2 + Q^2}.$$

2. Используя следствие 1, получаем

$$\sum_{(n,k)\in\Omega_{52}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right)(Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leqslant \frac{R-U_1 Q}{Q'}} (Q' + Q + \alpha \frac{R - nQ'}{Q}) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leqslant \frac{R-U_1 Q}{Q'}} \frac{R\alpha}{Q} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \frac{R^2\alpha}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q+Q'} \right).$$

   Суммируем по Q', получаем

$$\sum_{U_2\frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leqslant U_2 - Q} \frac{R^2\alpha}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q+Q'} \right) \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \frac{R^2\alpha}{Q} \log\left(1 + \frac{Q^2}{U_2^2}\right) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \frac{R^2 Q\alpha}{U_2^2}.$$

Следовательно, используя пункт (s), следствия 3, получаем

$$\Sigma_{53} \ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{Q \leqslant U_2 \\ \delta \nmid zQ}} \frac{1}{\|\frac{zQ}{\delta}\|} \left(R^2 \alpha \frac{U_2 + Q}{U_2^2 + Q^2} + \frac{R^2 Q \alpha}{U_2^2} \right) \ll$$

$$\ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{Q \leqslant \frac{U_2}{d}} \left(R^2 \alpha \frac{U_2 + dQ}{U_2^2 + d^2 Q^2} + \frac{R^2 dQ\alpha}{U_2^2} \right) \ll R^2 \alpha \sum_{d|\delta} \frac{\delta}{d} \log \frac{\delta}{d}.$$

Тем самым лемма доказана. □

9 Доказательство основного результата

Theorem 5. *Справедлива оценка*

$$F - G = O\left(N^{4+\varepsilon} \left(x_1^{1+\varepsilon} \frac{x_3^{\varepsilon}}{x_2^{\varepsilon}} + x_2^{1+\varepsilon} \frac{x_3^{\varepsilon}}{x_1^{\varepsilon}} + x_3^{1+\varepsilon} \right) \right),$$

где $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \varepsilon > 0$ *—действительные числа. F и G определены в* (20).

Доказательство. Подставляя в (28) полученные в леммах 7—21 асимптотические формулы и используя равенство

$$\frac{53}{150} + \frac{19}{75} + \left(\frac{2\pi}{15} - \frac{2\log 2}{5} - \frac{91}{900} \right) +$$
$$+ \left(\frac{11\pi}{120} - \frac{251}{60} \log 2 + \frac{14}{5} \right) + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{55}{12} \log 2 - \frac{119}{36} \right) = \frac{4\pi}{15},$$

получаем

$$\delta \sum_{\substack{a \leqslant R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{5} \Sigma_{ij} = \frac{4\pi}{15} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} +$$
$$+ \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) \left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} + \log \frac{U_2}{\tau} \right) (1 + \alpha) + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \log \tau \right) +$$
$$+ O\left(R^2 (1 + \alpha) \sum_{d|\delta} d \log d \right) + O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d \left(\log \frac{U_1}{\delta/d} + \alpha \log \frac{U_2}{\delta/d} \right) \right). \qquad (45)$$

Для оценки полученных выражений воспользуемся тривиальной оценкой функции Эйлера, логарифма и леммой 2.

1. Оценим первое асимптотическое слагаемое. Так как

$$\frac{\varphi(\tau)}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} + \log \frac{U_2}{\tau} \right) \ll (1 + \tau^{\varepsilon}) \left(1 + R^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} (\alpha^{\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon}) \right) \ll$$
$$\ll R^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} (\alpha^{\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon}),$$

$$R^\varepsilon\tau^\varepsilon(\alpha^\varepsilon+\alpha^{-\varepsilon})(1+\alpha)\ll R^\varepsilon\tau^\varepsilon(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})$$

и

$$\varphi(\tau)\sqrt{\alpha}\log\tau\ll\sqrt{\alpha}\tau^{1+\varepsilon}$$

Следовательно,

$$\sum_{\tau|\delta}\varphi(\tau)\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\log\tau)\left(1+\log\frac{U_1}{\tau}+\log\frac{U_2}{\tau}\right)(1+\alpha)+R^{3/2}\sqrt{\alpha}\log\tau\right)\ll$$
$$\ll R^{2+\varepsilon}\delta^\varepsilon(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})+R^{3/2}\sqrt{\alpha}\delta^{1+\varepsilon}$$

2. Оценим второе асимптотическое слагаемое.

$$R^2(1+\alpha)\sum_{d|\delta}d\log d\ll R^2(1+\alpha)\delta^{1+\varepsilon}$$

3. Оценим третье асимптотическое слагаемое. Так как

$$R^2\sum_{d|\delta}d\log d\left(\log\frac{U_1}{\delta/d}+\alpha\log\frac{U_2}{\delta/d}\right)\ll R^{2+\varepsilon}\delta^{1+\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})$$

Следовательно,

$$\delta\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\lambda(a,\alpha)=\frac{4\pi}{15}R^{5/2}\sqrt{\alpha}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+O\left(R^{2+\varepsilon}\delta^{1+\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})\right). \tag{46}$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма.

Lemma 22.

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}=\frac{\pi^2}{15}\frac{R^{5/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}+O\left(R^{3/2+\varepsilon}\delta^\varepsilon\right),$$

где

$$\sigma_{-1}(a)=\sum_{d|a}d^{-1}.$$

Доказательство.

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}=\sum_{d\leqslant R}\frac{1}{d}\sum_{\substack{a\leqslant R/d\\ \delta|ad}}a^{3/2}d^{3/2}=\sum_{\tau|\delta}\sum_{\substack{d\leqslant R\\ (d,\delta)=\tau}}\sqrt{d}\sum_{\substack{a\leqslant R/d\\ \frac{\delta}{\tau}|a}}a^{3/2}=$$

$$=\sum_{\tau|\delta}\sum_{\substack{d\leqslant R\\ (d,\delta)=\tau}}\sqrt{d}\left(\frac{2R^{5/2}\tau}{5d^{5/2}\delta}+O\left(\frac{R^{3/2}}{d^{3/2}}\right)\right)=\frac{2}{5}\frac{R^{5/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\sum_{\substack{d\leqslant R/\tau\\ (d,\frac{\delta}{\tau})=1}}\frac{1}{\tau d^2}+O\left(R^{3/2}\sum_{\tau|\delta}\sum_{\substack{d\leqslant R/\tau\\ (d,\frac{\delta}{\tau})=1}}\frac{1}{\tau d}\right)$$

Совершая замену переменной $\delta_1 = \frac{\delta}{\tau}$ и после этого обозначая $\tau = \delta_1$, получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \sigma_{-1}(a)a^{3/2} = \frac{2}{5}\frac{R^{5/2}}{\delta^2}\sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{\substack{d\leqslant R\tau/\delta\\ (d,\tau)=1}}\frac{1}{d^2} + O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{\substack{d\leqslant R\tau/\delta\\ (d,\tau)=1}}\frac{1}{d}\right)$$

Преобразуем обе внутренние суммы.

1. Преобразуем первое слагаемое.

$$\sum_{\substack{d\leqslant R\tau/\delta\\ (d,\tau)=1}}\frac{1}{d^2} = \sum_{d\leqslant R\tau/\delta}\frac{1}{d^2}\sum_{l|(d,\tau)}\mu(l) = \sum_{l|\tau}\frac{\mu(l)}{l^2}\sum_{d\leqslant \frac{R\tau}{l\delta}}\frac{1}{d^2} =$$

$$= \zeta(2)\sum_{l|\tau}\frac{\mu(l)}{l^2} + \sum_{l|\tau} O\left(\frac{\delta}{R\tau l}\right) = \zeta(2)\sum_{l|\tau}\frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\frac{\delta\sigma_{-1}(\tau)}{R\tau}\right).$$

2. Для оценки остаточного члена используем очевидное соотношение

$$\sum_{\substack{d\leqslant R\tau/\delta\\ (d,\tau)=1}}\frac{1}{d} = O\left(\log\frac{R}{\delta/\tau}\right).$$

   Следовательно,

$$O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{\substack{d\leqslant R\tau/\delta\\ (d,\tau)=1}}\frac{1}{d}\right) = O\left(R^{3/2}\sum_{\tau|\delta}\frac{\log\frac{R}{\tau}}{\tau}\right) = O\left(R^{3/2+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \sigma_{-1}(a)a^{3/2} = \frac{2\zeta(2)}{5}\frac{R^{5/2}}{\delta^2}\sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{l|\tau}\frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\sigma_{-1}(\tau)\right) + O\left(R^{3/2+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}\right).$$

Используя следующее соотношение

$$\sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{l|\tau}\frac{\mu(l)}{l^2} = \sum_{l|\delta}\frac{\mu(l)}{l^2}\sum_{\tau|\frac{\delta}{l}}l\tau = \sum_{\tau|\delta}\tau\sum_{l|\frac{\delta}{\tau}}\frac{\mu(l)}{l} = \sum_{\tau|\delta}\frac{\tau^2}{\delta}\varphi\left(\frac{\delta}{\tau}\right) = \delta\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}.$$

получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \sigma_{-1}(a)a^{3/2} = \frac{\pi^2}{15}\frac{R^{5/2}}{\delta}\sum_{\tau|\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + O\left(R^{3/2+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}\right).$$

Тем самым лемма доказана. □

Подставляя результат леммы 22 в формулу (46), получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \lambda(a,\alpha) = \sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\sqrt{\alpha} + O\left(R^{2+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})\right).$$

Подставляя полученную формулу в (25), получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{\lambda(a,\alpha)}{a} = \frac{1}{R}\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\sqrt{\alpha} + O\left(R^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})\right) +$$

$$+\int_1^R \left(\frac{1}{t^2}\sum_{\substack{a\leqslant t\\ \delta|a}} \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\sqrt{\alpha} + O\left(t^{\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})\right)\right)dt$$

Применяя преобразование Абеля (лемма 3), получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{\lambda(a,\alpha)}{a} = \sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)\sqrt{a}\sqrt{\alpha} + O\left(R^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})\right).$$

Следовательно, используя формулу (24), получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{\lambda^*(a,\alpha)}{a} = \sum_{n|\delta}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant R\\ (d_1d_2,\delta)=n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1}\sum_{\substack{a\leqslant \frac{R}{d_1d_2}\\ \frac{\delta}{n}|a}} \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)\sqrt{a}\sqrt{\frac{d_1\alpha}{d_2}} +$$

$$+O\left(\sum_{n|\delta}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant R\\ (d_1d_2,\delta)=n}} \frac{1}{d_1}\frac{R^{1+\varepsilon}}{(d_1d_2)^{1+\varepsilon}}\frac{\delta^{\varepsilon}}{n^{\varepsilon}}\left(\alpha^{1+\varepsilon}\frac{d_1^{1+\varepsilon}}{d_2^{1+\varepsilon}} + \alpha^{-\varepsilon}\frac{d_1^{-\varepsilon}}{d_2^{-\varepsilon}}\right)\right).$$

Совершая в обратной последовательности преобразования, поделанные в формуле (24), получаем

$$\sum_{n|\delta}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant R\\ (d_1d_2,\delta)=n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1}\sum_{\substack{a\leqslant \frac{R}{d_1d_2}\\ \frac{\delta}{n}|a}} \sigma_{-1}(a)\sqrt{a}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} =$$

$$= \sum_{n|\delta}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant R\\ (d_1d_2,\delta)=n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1}\sum_{\substack{a\leqslant \frac{R}{d_1d_2}\\ \frac{\delta}{n}d_1d_2|a}} \sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1d_2}\right)\sqrt{\frac{a}{d_1d_2}}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = \sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\sqrt{a}\sum_{d_1d_2|a}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1d_2}\sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1d_2}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}} \frac{\lambda^*(a,\alpha)}{a} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\alpha}\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\sqrt{a}\sum_{d_1d_2|a}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1d_2}\sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1d_2}\right) +$$

$$+O(R^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})).$$

Воспользовавшись формулой

$$\sum_{d_1d_2|a}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1d_2}\sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1d_2}\right) = \frac{\varphi(a)}{a}$$

доказанной в статье H. Heilbronn [12, §4], получаем

$$\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\frac{\lambda^*(a,\alpha)}{a}=\frac{4}{\pi}\sqrt{\alpha}\sum_{\substack{a\leqslant R\\ \delta|a}}\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}}+O(R^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}(\alpha^{1+\varepsilon}+\alpha^{-\varepsilon})).$$

Подставляя полученное выражение в лемму 6, получаем

$$F=\sum_{a\leqslant x_3N}\sum_{b\leqslant x_1N}\sum_{\substack{c\leqslant x_2N\\ (a,b,c)=1}}f(a,b,c)=\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant x_3N\\ (d_1,d_2)=1}}d_1d_2\sum_{\delta_1\leqslant\frac{x_3N}{d_1}}\sum_{\delta_2\leqslant\frac{x_3N}{d_2}}\frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(\delta_1,\delta_2)$$

$$\int_0^{\frac{x_1N}{d_1}}\int_0^{\frac{x_2N}{d_2}}\left(\sum_{\substack{a\leqslant\frac{x_3N}{d_1d_2}\\ \delta|a}}\frac{8}{\pi}\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}}\sqrt{t_1t_2}+\left(\frac{x_3N}{d_1d_2}\right)^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}O\left(\frac{t_2^{1+\varepsilon}}{t_1^{\varepsilon}}+\frac{t_1^{1+\varepsilon}}{t_2^{\varepsilon}}\right)\right)dt_1dt_2+O\left(x_1x_2x_3^{2+\varepsilon}N^{4+\varepsilon}\right).$$

Учитывая замечание 3, получаем

$$F-G=\sum_{a\leqslant x_3N}\sum_{b\leqslant x_1N}\sum_{\substack{c\leqslant x_2N\\ (a,b,c)=1}}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant x_3N\\ (d_1,d_2)=1}}d_1d_2\sum_{\delta_1\leqslant\frac{x_3N}{d_1}}\sum_{\delta_2\leqslant\frac{x_3N}{d_2}}\frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(\delta_1,\delta_2)\int\limits_0^{\frac{x_1N}{d_1}}\int\limits_0^{\frac{x_2N}{d_2}}\left(\frac{x_3N}{d_1d_2}\right)^{1+\varepsilon}\delta^{\varepsilon}O\left(\frac{t_2^{1+\varepsilon}}{t_1^{\varepsilon}}+\frac{t_1^{1+\varepsilon}}{t_2^{\varepsilon}}\right)dt_1dt_2+$$
$$+O\left(x_1x_2x_3^{2+\varepsilon}N^{4+\varepsilon}\right)=$$
$$=x_3^{1+\varepsilon}N^{4+\varepsilon}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant x_3N\\ (d_1,d_2)=1}}\left(\frac{x_1^{1-\varepsilon}x_2^{2+\varepsilon}}{d_1^{1+\varepsilon}d_2^{2+\varepsilon}}+\frac{x_2^{1-\varepsilon}x_1^{2+\varepsilon}}{d_2^{1+\varepsilon}d_1^{2+\varepsilon}}\right)\sum_{\delta_1\leqslant\frac{x_3N}{d_1}}\sum_{\delta_2\leqslant\frac{x_3N}{d_2}}\frac{(\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\delta^{\varepsilon}+O\left(x_1x_2x_3^{2+\varepsilon}N^{4+\varepsilon}\right).$$

Так как

$$\delta=\text{НОК}\left(\frac{\delta_1}{(\delta_1,d_2)},\frac{\delta_2}{(\delta_2,d_1)}\right)\leqslant\text{НОК}(\delta_1,\delta_2)=\frac{(\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2},$$

то

$$\sum_{\delta_1\leqslant\frac{x_3N}{d_1}}\sum_{\delta_2\leqslant\frac{x_3N}{d_2}}\frac{(\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\delta^{\varepsilon}\ll\sum_{d\leqslant\frac{x_3N}{\max(d_1,d_2)}}\sum_{\delta_1\leqslant\frac{x_3N}{dd_1}}\sum_{\delta_2\leqslant\frac{x_3N}{dd_2}}\frac{1}{(d\delta_1\delta_2)^{1-\varepsilon}}\ll\frac{x_3^{\varepsilon}N^{\varepsilon}}{(d_1d_2)^{\varepsilon}}.$$

Следовательно,

$$F-G=O\left(N^{4+\varepsilon}x_1x_2x_3\left(\frac{x_2^{1+\varepsilon}x_3^{\varepsilon}}{x_1^{\varepsilon}}+\frac{x_1^{1+\varepsilon}x_3^{\varepsilon}}{x_2^{\varepsilon}}+x_3^{1+\varepsilon}\right)\right).$$

Тем самым теорема 5 доказана. Из теоремы 5 сразу следует утверждение теоремы 4. □

10 Приложение

Следующая лемма так же общеизвестна (формула суммирования Эйлера-Маклорена)

Lemma 23. *Пусть функции* $\rho(x)$, $\sigma(x)$ *определяются равенствами*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(t)dt.$$

Тогда

(a) Если $f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

(b) Если $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)dx.$$

Доказательство. см в книге А.А.Карацубы [7]. □

Нам понадобятся следствия леммы 23.

Corollary 2. *Если* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ *и монотонна, то*

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + O(f(b)) + O(f(a)).$$

Доказательство. Действительно, если функция монотонна то

$$\left| \int_a^b \rho(x)f'(x)dx \right| \ll \int_a^b |f'(x)|dx = O(f(b)) + O(f(a)).$$

Теперь утверждение непосредственно следует из пункта (b) леммы 23. □

Corollary 3. *Справедливы следующие асимптотические формулы*

(a) Для любого натурального p *выполнено*

$$\sum_{n\leqslant R} n^p = \frac{R^{p+1}}{p+1} + O\left(R^p\right),$$

(b) Для любого натурального p *выполнено*

$$\sum_{n\leqslant R} n^p \log \frac{R}{n} = \frac{R^{p+1}}{(p+1)^2} + O\left(R^p \log R\right),$$

(c)

$$\sum_{n\leqslant R} n\frac{R-n}{R+n} = \left(\frac{3}{2} - 2\log 2\right) R^2 + O\left(R\right),$$

(d)

$$\sum_{n\leqslant R} n^2\frac{(R-n)^2}{(R+n)^2} = \left(\frac{25}{3} - 12\log 2\right) R^3 + O\left(R^2\right),$$

(e)

$$\sum_{n\leqslant R} \frac{(R-n)}{n^2+R^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

(f)

$$\sum_{n\leqslant R} n^2\log\left(1+\frac{R}{n}\frac{R-n}{R+n}\right) = \left(\frac{5}{6} - \frac{\log 2}{3} - \frac{\pi}{6}\right) R^3 + O\left(R^2\log R\right),$$

(g)

$$\sum_{n\leqslant R} n^2\frac{R-n}{R^2+n^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) R^2 + O\left(R\right),$$

(h)

$$\sum_{n\leqslant R} n^3\frac{R-n}{R+n} = \left(\frac{17}{12} - 2\log 2\right) R^4 + O\left(R^3\right),$$

(i)

$$\sum_{n\leqslant R} n^4\log\left(1+\frac{R}{n}\frac{R-n}{R+n}\right) = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{3}{20} - \frac{\log 2}{5}\right) R^5 + O\left(R^4\log R\right),$$

(j)

$$\sum_{n\leqslant R} n^4\frac{R-n}{R^2+n^2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{12} - \frac{\log 2}{2}\right) R^4 + O\left(R^3\right),$$

(k)

$$\sum_{n\leqslant R} n^2\frac{R-n}{R+n} = \left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right) R^3 + O\left(R^2\right),$$

(l)

$$\sum_{n\leqslant R} n\frac{(R-n)^2}{(R+n)^2} = \left(8\log 2 - \frac{11}{2}\right) R^2 + O\left(R\right),$$

(m)

$$\sum_{n\leqslant R} n\log\left(1+\frac{n}{R}\right) = \frac{R^2}{4} + O\left(R\right),$$

(n)

$$\sum_{n\leqslant R} n^2\log\left(1+\frac{n}{R}\right) = \left(\frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{18}\right) R^3 + O\left(R^2\right),$$

(o)

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{n^2}{R^2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\log 2\right)\frac{1}{R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

(p)

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{(R-n)^2}{(R+n)^2}=(3-4\log 2)\,R+O\left(1\right),$$

(r)

$$\sum_{n\leqslant R} n\log\frac{R^2+n^2}{n(R+n)}=O\left(R^2\right),$$

(s)

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{(R+n)}{n^2+R^2}=O\left(1\right).$$

Доказательство. Все пункты доказываются непосредственным применением пункта (b) леммы 23.

(b) Достаточно применить пункт (b) леммы 23 и формулу

$$\int x^p\log x=\frac{x^{p+1}}{p+1}\log x-\frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}. \tag{47}$$

(e) Достаточно применить пункт (b) леммы 23 и формулу

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a},\quad \int\frac{x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\log\left(x^2+a^2\right).$$

(f) Преобразуем суммируемую функцию

$$n^2\log\left(1+\frac{R}{n}\frac{R-n}{R+n}\right)=n^2\log\left(R^2+n^2\right)-n^2\log n-n^2\log\left(R+n\right).$$

К каждой из трех сумм применим пункт (b) леммы 23, используя формулу (47) и формулу

$$\int x^2\log(x^2+a^2)dx=\frac{1}{3}\left(x^3\log(x^2+a^2)-\frac{2}{3}x^3+2xa^2-2a^3\arctan\frac{x}{a}\right).$$

(g) Преобразуем суммируемую функцию

$$n^2\frac{R-n}{R^2+n^2}=(R-n)+R^2\frac{n}{R^2+n^2}-R^3\frac{1}{R^2+n^2}$$

К каждой из трех сумм применим пункт (b) леммы 23.

(i) Преобразуем суммируемую функцию

$$n^4 \log\left(1 + \frac{R}{n}\frac{R-n}{R+n}\right) = n^4 \log\left(R^2 + n^2\right) - n^4 \log n - n^4 \log\left(R+n\right).$$

К каждой из трех сумм применим пункт (b) леммы 23, используя формулу (47) и формулу

$$\int x^4 \log(x^2 + a^2)dx = \frac{1}{5}\left(x^5 \log(x^2 + a^2) - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3a^2 - 2xa^4 + 2a^5 \arctan\frac{x}{a}\right).$$

(j) Преобразуем суммируемую функцию

$$n^4 \frac{R-n}{R^2+n^2} = \left(-n^3 + Rn^2 + R^2n - R^3\right) + R^4\frac{R-n}{R^2+n^2}.$$

К каждой сумме применим пункт (b) леммы 23.

(0) Преобразуем суммируемую функцию

$$\frac{1}{n^2}\log\left(1 + \frac{n^2}{R^2}\right) = \frac{\log(R^2+n^2)}{n^2} - \frac{\log(R^2)}{n^2}.$$

К каждой из двух сумм применим пункт (b) леммы 23, используя формулу

$$\int \frac{\log(a^2+x^2)}{x^2}dx = -\frac{\log(a^2+x^2)}{x} + 2\arctan\frac{x}{a}.$$

$\square$

Список литературы

[1] Ramirez Alfonsin J. L. The Diophantine Frobenius problem, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 30, Oxford Univ, Press, Oxford,2005

[2] Устинов А. В. Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами.Матем.сб., 200:4(2009),131-160

[3] Устинов А. В. Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида. — *Изв. РАН.* Сер.матем.,72:5(2008),189-224.

[4] Жабицкая Е. Н. Средняя длина приведенной регулярной непрерывной дроби. Матем.сб., 200:8(2009),79-110

[5] Knuth D. E, Yao A. C Analysis of thesubstractive algorithm for gretest common divisors. -Proc.Nat.Acad.USA,v.72,№12,1975,4720-4722

[6] Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел.-М.,Мир,1974.

[7] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел.-М.,Наука,1983.

[8] Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения.-М.,Наука,1989.

[9] Rödseth Ö. J. On a linear Diophantine problem of Frobenius, J. Reine Angew. Math., 301 (1978), 161-170

[10] Perron O. Die Lehre von den Kettenbruchen. Bd.1. Elementare Kettenbruche. Teuber,1954

[11] Johnson S. M. A linear diophantine problem. Canad.J.Math.,12(1960),390-398

[12] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB, 1968, 89–96